

RATIONALE TSCHEBYSCHJEFF-APPROXIMATION ÜBER UNBESCHRÄNKTEN INTERVALLEN

Habilitationsschrift
zur Erlangung der *venia legendi*
der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

von
Hans-Peter Blatt

Tag der Habilitation: 31. Juli 1974
Eingereicht im Juni 1974

RATIONALE
TSCHEBYSCHEFF-APPROXIMATION
ÜBER UNBESCHRÄNKTEN
INTERVALLEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

RATIONALE TSCHEBYSCHJEFF-APPROXIMATION ÜBER UNBESCHRÄNKTEN INTERVALLEN

Habilitationsschrift
zur Erlangung der *venia legendi*
der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



von
Hans-Peter Blatt

Tag der Habilitation: 31. Juli 1974
Eingereicht im Juni 1974

RATIONALE
TSCHEBYSCHOFF-APPROXIMATION
ÜBER UNBESCHRÄNKTE
INTERVALLE

Habilitationschrift
zur Erlangung des Grades eines
Dr. phil. in der
Mathematik
an der Universität Göttingen



von
Hans-Joachim Blum

Tag der Promotion: 27. Juli 1974
Ergründet im Jahr 1974

INHALT

	Seite
Einleitung	i
1. Rationale Tschebyscheff-Approximation über unbeschränkten Intervallen	1
2. Stetigkeitseigenschaften der Minimallösungen	25
3. Rationale Approximation singulärer Funktionen	42
4. Asymptotische Aussagen für die Minimalabweichung von $\frac{1}{g}$ mit ganzer Funktion g	47
5. Vergleichs- und Störungssätze zur geometrischen Konvergenz der Minimalabweichung	62
Literaturverzeichnis	83

Einleitung

Will man bei der Wärmeleitungsgleichung Näherungslösungen berechnen, so betrachtet man Matrizennäherungen für die Matrix

$$e^{-tA},$$

wobei A eine quadratische, hermetische und positiv definite Matrix ist, und t als Zeitparameter zu $[0, \infty)$ gehört. Neben der rationalen Padé-Matrixapproximation bieten sich rationale Tschebyscheff-Matrixapproximationen an, die mit der rationalen Approximation von e^{-x} in $[0, \infty)$ verknüpft sind [5].

Weitere Anwendungsmöglichkeiten rationaler Tschebyscheff-Approximationen über unbeschränkten Intervallen finden sich in der Elektrotechnik, wo man beispielsweise bei der Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitentzerrung solche Approximationen, oft noch unter zusätzlichen Nebenbedingungen, benötigt.

Wir untersuchen in dieser Arbeit rationale Tschebyscheff-Approximationen zu Funktionen, die über unbeschränkten, abgeschlossenen Intervallen von $\mathbb{R}$ stetig und reellwertig sind: $C[a, \infty]$ sei die Menge der auf $[a, \infty]$ stetigen, reellwertigen Funktionen mit der Tschebyscheff-Norm $||\cdot||$ und s eine stetige Gewichtsfunktion mit den Eigenschaften:

$$(a) \quad 0 < s(x) < \infty \text{ für alle } x \in [a, \infty) \cap \mathbb{R},$$

(b) es gebe ein maximales $k \in \mathbb{Z}$, so daß in $\mathbb{R}$ der Grenzwert

$S(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} s(x)x^k$ existiert und, falls $a = -\infty$ ist,

auch der Grenzwert $S(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) \cdot x^k$.

Für nichtnegative ganze Zahlen m, n mit $m-n \leq k$ betrachten wir die Approximationsfunktionen

$$V_n^m = \left\{ v = s \frac{p}{q} \in C[a, \infty] \mid \begin{array}{l} p \in \Pi_m, q \in \Pi_n \\ q(x) > 0 \text{ in } [a, \infty] \end{array} \right\},$$

wobei wir unter Π_n die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ verstehen.

Zu einem gegebenen $f \in C[a, \infty]$ untersuchen wir nun die Minimallösungen bezüglich V_n^m . Die Existenz einer Minimallösung läßt sich ähnlich beweisen wie über beschränkten Intervallen

(Satz 1). Dagegen ist das Approximationssystem V_n^m im allgemeinen weder regulär, noch sind die Funktionen $v = s \frac{p}{q} \in V_n^m$ nach den Koeffizienten der Polynome p und q differenzierbar.

Man kann daher nicht auf die Kolmogoroff-Kriterien zur Charakterisierung zurückgreifen. Vielmehr zeigt es sich, daß das globale Kolmogoroff-Kriterium nur unter zusätzlichen Bedingungen notwendig für eine Minimallösung ist (Satz 2). Mit dessen Hilfe gelingt es, die Minimallösung $v_0 = s \frac{p_0}{q_0}$ durch eine Alternante zu charakterisieren, deren Länge sich für

$m - \text{grad}(p_0) < n - \text{grad}(q_0)$ und $m-n < k$ von derjenigen unterscheidet, die man von einem beschränkten Intervall her kennt.

Genügt f einer Dimensionsbedingung, die an diejenige von Loeb

(siehe [7], S. 165) zum Nachweis der Normalität von Funktionen erinnert, so kann man diesen Ausartungsfall ausschließen (Satz 5). Trotz dieser Schwierigkeiten ist die Minimallösung, von wenigen Ausnahmefällen abgesehen, eindeutig bestimmt (Satz 4). Bisher bekannte Ergebnisse von Achieser [1] beziehen sich nur auf den Fall $m-n = k$, bei dem sich die bekannten Methoden für beschränkte Intervalle übertragen lassen.

Auch bei der Untersuchung der Stetigkeit des Bestapproximationsoperators tritt für $m-n < k$ ein wesentlicher Unterschied zur Approximation auf einem beschränkten Intervall auf. Es läßt sich nämlich keineswegs beweisen, daß dieser Operator bei normalem f stetig ist, wenn wir die bekannte Definition der Normalität zugrunde legen. Wir müssen vielmehr unter anderem fordern, daß im Fall $m-n < k$ der Gradabfall der Minimallösung im Nenner höchstens 1 sein darf (Satz 6).

Bezeichnen wir zu $f \in C[-1,1]$ mit

$$\rho_n(f) := \inf_{p \in \Pi_n} \|f-p\|_{[-1,1]}$$

die Minimalabweichung bezüglich Π_n über $[-1,1]$ und zu $s > 1$ mit $\mathcal{E}(s)$ die offene Ellipse der komplexen Ebene mit Brennpunkten in -1 und $+1$ und der Summe s der beiden Halbachsen, so besagt ein klassischer Satz von Bernstein [2]:

Ist f Restriktion einer in $\mathcal{E}(s)$ holomorphen Funktion, dann

gilt:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\rho_n(f))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{s}.$$

Gilt umgekehrt eine solche Beziehung, so ist f Restriktion einer in $\mathcal{E}(s)$ holomorphen Funktion.

In den letzten Jahren wurde versucht, solche Beziehungen zwischen der Holomorphie und der geometrischen Konvergenz der Minimalabweichungen auch für die Approximation bezüglich rationaler Funktionen über $[0, \infty]$ herzuleiten. Wir bezeichnen mit $\Pi_{m,n}$ die Menge

$$\Pi_{m,n} := \left\{ r_{m,n} = \frac{p_m}{q_n} \mid p_m \in \Pi_m, q_n \in \Pi_n \right\}.$$

Mit der asymptotischen Untersuchung der Minimalabweichungen

$$\lambda_{m,n} := \inf_{r_{m,n} \in \Pi_{m,n}} \left\| \frac{1}{g} - r_{m,n} \right\|_{[0, \infty]}$$

für ganze Funktionen g begannen Cody, Meinardus und Varga [5]. Sie zeigten für $g(x) = e^x$, daß die Ungleichungen

$$\frac{1}{6} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} \leq 0.43501\dots$$

erfüllt sind. Später bewies Schönhage [16], daß sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

gilt, indem er die Funktion $e^{\frac{x}{4}}$ nach den Laguerreschen Polynomen über $[0, \infty]$ entwickelt. Newman [12] wies nach, daß man auch bei der Approximation von e^{-x} mit allgemeinen rationalen Funktionen nicht mehr als geometrische Konvergenz erhält.

Meinardus und Varga [10] dehnten die Ergebnisse für e^x auf ganze Funktionen von perfekt regulärem Wachstum aus. Sie zeigten, daß für solche Funktionen der Ordnung $\rho > 0$, die zusätzlich nichtnegative Taylorkoeffizienten haben, die Ungleichung

$$\frac{1}{2^{2+1/\rho}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{1/\rho}}$$

erfüllt ist.

Meinardus [8] untersuchte schließlich notwendige Bedingungen für die geometrische Konvergenz, d.h. für

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Dazu betrachtet er zu gegebenem $r > 0$ und $s > 1$ die abgeschlossene Ellipse $\Xi(r,s)$ der komplexen Ebene mit Brennpunkten in 0 und r und der Summe rs beider Achsen. Ist g eine gan-

ze Funktion, so definiert er

$$M_g(r,s) := \max_{z \in \mathcal{C}(r,s)} |g(z)|$$

und beweist, daß aus der geometrischen Konvergenz für eine reelle, stetige Funktion g folgt, daß g sich zu einer ganzen Funktion von endlicher Ordnung fortsetzen läßt, so daß g der folgenden Wachstumsbedingung genügt:

Zu jedem $s > 1$ gibt es positive Konstanten K , θ und r_0 mit

$$M_g(r,s) \leq K \cdot (||g||_{[0,r]})^\theta \text{ für alle } r \geq r_0.$$

Umgekehrt wiesen Meinardus, Reddy, Taylor und Varga [11] für ganze Funktionen $g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ mit $a_v \geq 0$ für $v \geq 0$ und $a_0 > 0$, die zusätzlich dieser Wachstumsbedingung genügen, geometrische Konvergenz nach.

Um die Diskrepanz zwischen hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die geometrische Konvergenz abzubauen, betrachten wir im dritten Abschnitt die Approximation von Funktionen über $[a, \infty]$, die in gewissen Punkten des Intervalls Singularitäten aufweisen, bezüglich

$$V_n = \left\{ \frac{1}{q} \mid q \in \Pi_n \right\}$$

und charakterisieren die Minimallösungen durch eine Alternante (Sätze 8 und 9).

Mit dieser Charakterisierung gelingt es, die hinreichende Bedingung für geometrische Konvergenz von g , daß nämlich alle Taylorkoeffizienten nichtnegativ sein sollen, dahingehend abzuschwächen, daß man endlich viele negative Koeffizienten zulassen kann (Sätze 12 und 13).

Zum Auffinden weiterer Klassen von Funktionen mit geometrischer Konvergenz erweisen sich Vergleichssätze als nützlich, die für die Summe und das Produkt von Funktionen mit geometrischer Konvergenz wieder geometrische Konvergenz liefern (Sätze 14 und 15). Außerdem greifen wir eine Idee von Roulier und Taylor [15] auf, die für eine Funktion, die nicht zu sehr von einer Funktion mit geometrischer Konvergenz abweicht, ebenfalls diese Konvergenz beweisen (Satz 16). Ein Nachteil dieses Satzes liegt darin, daß man ihn nicht mehrmals hintereinander anwenden kann. Wir modifizieren diesen Störungssatz so, daß er diesen Mangel nicht mehr aufweist und in Verbindung mit Satz 12 eine Verallgemeinerung des Satzes von Roulier und Taylor darstellt (Satz 17). Als Anwendungsbeispiel läßt sich unter anderem die geometrische Konvergenz von

$$e^x + b \cos x$$

für beliebiges $b \in \mathbb{R}$ zeigen, wodurch eine Vermutung von Roulier und Taylor, nämlich die geometrische Konvergenz von

$$e^x + e^4 \cos x,$$

bestätigt wird.

1. Rationale Tschebyscheff-Approximation über unbeschränkten Intervallen

$[a, b]$ sei ein unbeschränktes, abgeschlossenes Intervall der durch $+\infty$ und $-\infty$ kompaktifizierten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}}$. Wir setzen ohne Einschränkung voraus, daß stets $b = \infty$ ist.

$C[a, \infty]$ sei die Menge der auf $[a, \infty]$ stetigen, reellwertigen Funktionen mit der Tschebyscheff-Norm $|| \cdot ||$. Gegeben sei eine stetige Funktion $s : [a, \infty] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit den Eigenschaften:

$$0 < s(x) < \infty \quad \text{für alle } x \in [a, \infty] \cap \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

es gebe ein maximales $k \in \mathbb{Z}$, so daß in $\mathbb{R}$ der Grenzwert (1.2)

$$S(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} s(x) x^k \quad \text{existiert und, falls } a = -\infty \text{ ist,}$$

$$\text{auch der Grenzwert } S(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) x^k.$$

Für $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $m-n \leq k$ definieren wir die Menge der Approximationsfunktionen

$$V_n^m = \left\{ v = s \frac{p}{q} \in C[a, \infty] \mid \begin{array}{l} p \in \Pi_m, q \in \Gamma_n \\ q(x) > 0 \text{ in } [a, \infty] \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

Dabei verstehen wir unter Π_m bzw. Γ_n die Menge der Polynome vom Grad $\leq m$ bzw. $\leq n$.

Es ist klar, daß wir uns im Fall $a = -\infty$ auf gerades n beschränken.

Zu einem gegebenen $f \in C[a, \infty]$ suchen wir ein $v_0 \in V_n^m$ mit

$$||f - v_0|| \leq ||f - v|| \quad \text{für alle } v \in V_n^m.$$

Ein solches v_0 heißt Minimallösung zu f bezüglich V_n^m .

Für $v \in V_n^m$ sei

$$M(v) := \{ x \in [a, \infty] \mid |f(x) - v(x)| = \|f - v\| \} \quad (1.4)$$

die Menge der Extrempunkte von $f - v$. Ein Punkt $x \in M(v)$ mit $\operatorname{sgn}(f(x) - v(x)) = +1$ heißt (+)-Punkt von $f - v$, einer mit $\operatorname{sgn}(f(x) - v(x)) = -1$ ein (-)-Punkt.

Außerdem setzen wir

$$\rho_{V_n^m}(f) := \inf_{v \in V_n^m} \|f - v\| \quad (1.5)$$

und nennen diese Zahl die Minimalabweichung von f bezüglich V_n^m .

In den Beweisen schreiben wir dafür abkürzend ρ .

Eine Folge $\{v_i\}$ von Funktionen aus V_n^m heißt Minimalfolge zu f , wenn $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f - v_i\| = \rho_{V_n^m}(f)$ ist.

Satz 1:

Jedes $f \in C[a, \infty]$ besitzt eine Minimallösung bezüglich V_n^m .

Beweis:

Sei $\{v_i\}$ Minimalfolge zu f , dann gibt es eine Konstante K mit $\|v_i\| < K$ für $i = 1, 2, \dots$.

Wir wählen nun ein beschränktes Intervall $[\alpha, \alpha+1]$ in $[a, \infty]$ und legen die Darstellung $v_i = s \cdot \frac{p_i}{\sigma_i}$ durch

$$\|q_i\|_1 := \max_{x \in [\alpha, \alpha+1]} |q_i(x)| = 1$$

fest. Also folgt dann für $i = 1, 2, \dots$

$$p_i(x) = \left| \frac{v_i(x)}{s(x)} \cdot a_i(x) \right| \leq K^*$$

für $x \in [\alpha, \alpha+1]$ und ein geeignetes $K^* > 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{i_j\}$ und $p \in \Pi_m$, $q \in \Pi_n$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|p_{i_j} - p\|_1 = 0,$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|q_{i_j} - q\|_1 = 0.$$

Außerdem gilt $\|q\|_1 = 1$. Also hat q höchstens n Nullstellen in $[a, \infty]$. Für jedes $x \in [a, \infty)$ mit $q(x) \neq 0$ gilt

$$|f(x) - s(x) \frac{p(x)}{q(x)}| \leq \rho.$$

Ist $p=0$, dann ergibt sich daraus, daß $v=0$ Minimallösung ist.

Ist $p \neq 0$, dann folgt wegen

$$|p_i(x)| \leq \frac{K}{s(x)} |a_i(x)|,$$

daß jede Nullstelle von q in $[a, \infty]$ auch eine Nullstelle von p ist mit mindestens derselben Ordnung. Also läßt sich jede Nullstelle von q in $[a, \infty]$ gegen eine entsprechende von p kürzen. Bezeichnen wir mit $\frac{p^*}{q^*}$ den Quotient, den man aus $\frac{p}{q}$ nach Kürzen der Nullstellen von q in $[a, \infty]$ erhält, so gilt für alle $x \in [a, \infty] \cap \mathbb{R}$:

$$|f(x) - s(x) \frac{p^*(x)}{q^*(x)}| \leq \rho.$$

Aus Stetigkeitsgründen muß diese Ungleichung in ganz $[a, \infty]$ gelten, d.h. $s \frac{p^*}{q^*}$ gehört zu V_n^m und ist Minimallösung zu f .

Im folgenden wollen wir die Minimallösungen charakterisieren. Dazu ist zu bemerken, daß V_n^m weder regulär ist, noch sind die Funktionen $v \in V_n^m$ nach den Koeffizienten der Polynome p und q differenzierbar. Trotzdem läßt sich unter einer Einschränkung ein Kolmogoroff-Kriterium beweisen.

Wir betrachten dazu die Bedingung:

$$(V1) \quad \cap_{V_n^m} (f) > \begin{cases} |f(\infty)| & \text{für } a > -\infty \\ \max (|f(\infty)|, |f(-\infty)|) & \text{für } a = -\infty \end{cases}$$

Des weiteren definieren wir für $v = s \frac{p}{q} \in V_n^m$ und $x \in [a, \infty]$:

$$\sigma(v, x) := \begin{cases} +1 & \text{für } p(x) > 0 \\ -1 & \text{für } p(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wir p als Funktion von $[a, \infty] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ auffassen.

Satz 2:

Ist $m-n=k$ oder (V1) erfüllt, dann ist v_0 genau dann Minimal-lösung zu f , wenn für alle $v \in V_n^m$ die Ungleichung

$$\min_{x \in M(v_0)} (f(x) - v_0(x)) \cdot (v(x) - v_0(x)) \leq 0$$

erfüllt ist.

Beweis:

Wie die klassische Theorie zeigt, ist das Kriterium stets hinreichend (Meinardus [7], S. 128).

Notwendigkeit:

Wir nehmen an, es gäbe ein $v = s \frac{p}{q} \in V_n^m$ mit

$$\min_{x \in M(v_0)} (f(x) - v_0(x)) \cdot (v(x) - v_0(x)) = 0.$$

Definieren wir mit $v_0 = s \frac{p_0}{q_0}$

$$v_t := s \frac{p_0 + t(p-p_0)}{q_0 + t(q-q_0)}, \quad (1.7)$$

dann ist für $0 \leq t \leq 1$ auch $v_t \in V_n^m$.

Wir unterscheiden die Fälle

$$(1) \quad v_0, v \in V_{m-k}^m:$$

Sei

$$j := \begin{cases} m-k, & \text{falls } a \nmid m-k \text{ oder } m-k \text{ gerade} \\ m-k-1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.8)$$

dann können wir, da k maximal gewählt ist, durch Erweitern erreichen, daß $q_0, q \in \Pi_j = \Pi_{j-1}$.

Weiter ist

$$\begin{aligned} v_0 - v_t &= s \frac{p_0}{q_0} - s \frac{p_0 + t(p-p_0)}{q_0 + t(q-q_0)} \\ &= s \frac{t[p_0 q - q_0 p]}{q_0 [q_0 + t(q - q_0)]} \end{aligned}$$

oder

$$v_0 - v_t = t \frac{v_0 - v}{\frac{q_0}{q} + t(1 - \frac{q_0}{q})} \quad (1.9)$$

Es gibt nun Konstanten $t_0 > 0$ und $\varepsilon > 0$, so daß für

$0 \leq t \leq t_0$ und $x \in [a, \infty]$ gilt:

$$\frac{q_0(x)}{q(x)} + t \left(1 - \frac{q_0(x)}{q(x)}\right) > \varepsilon.$$

$$\text{Wegen } f - v_t = f - v_0 + t \frac{v_0 - v}{\frac{q_0}{q} + t(1 - \frac{q_0}{q})}$$

schließt man wie im klassischen Fall, daß v_0 keine Minimal-
lösung ist (Achieser [1], S. 58).

$$(2) \quad v_0 \in V_{m-k}^m, v \notin V_{m-k}^m, \sigma(v_0, \infty) \neq 0:$$

Wir können wieder annehmen, daß $q_0 \in \Pi_j - \Pi_{j-1}$ mit j wie in (1.8).

$$(\alpha 1) \quad \infty \in M(v_0):$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$F := \begin{cases} |f(\infty)| & \text{für } a \neq -\infty \\ \max(|f(\infty)|, |f(-\infty)|) & \text{für } a = -\infty \end{cases} \quad (1.10)$$

und betrachten zuerst $\sigma(v_0, \infty) = +1$. Wegen (V1) muß $v_0(\infty) > 0$
sein und es gibt ein $\gamma > 0$ mit

$$||f - v_0|| = F + 2\gamma.$$

Dann gibt es ein $\alpha > 0$, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $x > \alpha$ die Ungleichungen

$$v_0(x) - ||f - v_0|| \leq f(x) < F + \gamma$$

gelten. Da $v_0(\infty) - v(\infty) = v_0(\infty) > 0$ ist und $q \notin \pi_{m-k}$, so folgt aus (1.9), daß es ein $\beta > 0$ gibt, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $x > \beta$ und $0 < t \leq 1$

$$v_0(x) - v_t(x) > 0$$

gilt. Dieses β kann man so groß wählen, daß insgesamt die Ungleichungen

$$-\gamma \leq -|v(x)| \leq v_t(x) < v_0(x)$$

für $x \in [a, \infty]$ mit $x > \beta$ und $0 < t \leq 1$ erfüllt sind. Also ergibt sich für $x \in [a, \infty]$ mit $x > \delta_1 := \max(\alpha, \beta)$ und $0 < t \leq 1$:

$$- ||f - v_0|| < f(x) - v_t(x) < ||f - v_0||. \quad (1.11)$$

Analog beweist man eine solche Ungleichung für $\sigma(v_0, \infty) = -1$.

($\alpha 2$)- $\infty \in M(v_0)$:

Durch äquivalente Überlegungen wie bei ($\alpha 1$) ergibt sich, daß ein $\delta_2 > 0$ existiert, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $x < -\delta_2$ und $0 < t \leq 1$ die Ungleichung (1.11) erfüllt ist.

(α3) $\infty \notin M(v_0)$:

Also ist $||f - v_0|| > |f(\infty) - v_0(\infty)|$ und wir wählen $\gamma > 0$ so, daß $||f - v_0|| \geq F + 2\gamma$ und $||f - v_0|| \geq |f(\infty) - v_0(\infty)| + 2\gamma$ gelten. Nun gibt es ein $\alpha > 0$, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $x > \alpha$ gilt:

$$|f(x) - f(\infty)| < \varepsilon.$$

Zunächst sei $\sigma(v_0, \infty) = 1$. Dann gibt es ein $\beta > 0$, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $x > \beta$ und $0 < t \leq 1$ die Ungleichungen

$$-\gamma \leq -|v(x)| \leq v_t(x) \leq v_0(x) + |v(x)| \leq v_0(\infty) + \gamma$$

richtig sind. Insgesamt ergibt sich für $x \in [a, \infty]$ mit

$x > \delta_3 := \max(\alpha, \beta)$ und $0 < t \leq 1$:

$$f(\infty) - v_0(\infty) - 2\gamma < f(x) - v_t(x) < f(\infty) + 2\gamma$$

oder die Ungleichungen (1.11).

Entsprechendes beweist man für $\sigma(v_0, \infty) = -1$.

(α4) $-\infty \notin M(v_0)$:

Wie unter (α3) beweist man, daß es ein $\delta_4 > 0$ gibt, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $x < -\delta_4$ und $0 < t \leq 1$ die Ungleichungen (1.11) gelten.

Durch Kombinieren der Fälle (α1)-(α4) erhält man ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in [a, \infty]$ mit $|x| > \delta$ und $0 < t \leq 1$ die Ungleichungen (1.11) erfüllt sind. Nach der klassischen Theorie gibt es nun ein $0 < \tau \leq 1$, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| \leq \delta$ auch

$$|f(x) - v_\tau(x)| < ||f - v_0||$$

gilt. Damit ist v_τ auf ganz $[a, \infty]$ eine bessere Approximation als v_0 .

(3) $v_0 \notin V_{m-k}^m$ oder $\sigma(v_0, \infty) = 0$ ($m-n < k$):

Wir wählen wieder $\gamma > 0$ mit $||f - v_0|| = F + 2\gamma$ und $\alpha > 0$ so, daß für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| > \alpha$

$$-F - \gamma < f(x) < F + \gamma$$

erfüllt ist. Falls $\sigma(v_0, \infty) = 0$, so betrachten wir von v_0 eine Darstellung $v_0 = \frac{0}{q_0}$ mit $q_0 \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$. Da in jedem Fall $\text{grad}(q_0) > m-k$ ist, erhalten wir für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und $|x| \rightarrow \infty$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |v_t(x)| &\leq \left| \frac{s(x)p_0(x)}{(1-t)q_0(x)+tq(x)} \right| + t \left| \frac{s(x)(p-p_0)(x)}{(1-t)q_0(x)+tq(x)} \right| \\ &\leq 2|v_0(x)| + t O\left(\frac{1}{|x|}\right). \end{aligned}$$

Es gibt also ein $\beta > 0$, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| > \beta$ und $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$|v_t(x)| \leq \gamma$$

richtig ist. Damit gilt für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| > \delta := \max(\alpha, \beta)$ und $0 < t \leq \frac{1}{2}$:

$$-||f - v_0|| = -F - 2\gamma < f(x) - v_t(x) < F + 2\gamma = ||f - v_0||.$$

Wie unter (2) schließt man weiter, daß v_0 keine Minimallösung sein kann.

Falls (V1) für $m-n < k$ nicht erfüllt ist, dann ist im allgemeinen die Bedingung von Satz 2 nicht notwendig.

Beispiel 1:

Wir approximieren über $[0, \infty]$ mit $s(x) \equiv 1$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } 2 \leq x \end{cases}$$

bezüglich v_n^0 ($n \geq 0$). Dann ist $v_0(x) \equiv 1$ Minimallösung bezüglich v_n^0 für alle $n \geq 0$ und $M(v_0) = \{0, 1\}$. Außerdem ist $v_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$ ebenfalls Minimallösung für $n \geq 2$, also ist die Minimallösung nicht eindeutig. Nimmt man $v(x) = \frac{1}{(x-1)^2 + 0.5}$, so gilt

$$\min_{x=0,1} (f(x) - v_0(x))(v(x) - v_0(x)) > 0.$$

Um einen Alternantensatz beweisen zu können, benötigen wir zusätzlich:

(S) $S(\infty) > 0$ und, falls $a = -\infty$ ist, auch $S(-\infty) > 0$.

Damit ist im Fall $a = -\infty$ die Zahl k gerade.

Hilfssatz 1:

(S) sei erfüllt und außerdem (V1) im Fall $m-n < k$. Ist v_0 Minimal-
lösung zu f , dann ist die Fehlerfunktion $f - v_0$ nicht konstant,
falls $\rho_{v_n^m}(f) > 0$ ist.

Beweis:

Nehmen wir an, die Fehlerfunktion wäre konstant, d.h.

$$f(x) - v_0(x) = \epsilon \cdot ||f - v_0|| \text{ für alle } x \in [a, \infty] \text{ mit } \epsilon = \pm 1.$$

Dann gilt für $m-n < k$ wegen (V1): $m \leq \text{grad}(q_0) + k$.

Dies ist aber auch für $m-n=k$ erfüllt. Wählen wir ein Polynom

p mit $\text{grad}(p) = \text{grad}(q_0) + k$ und $p(x) > 0$ in $[a, \infty]$, so ist

$$s \left[\frac{p_0}{q_0} + t \epsilon \frac{p}{q_0} \right] \text{ für } 0 < t < \frac{||f-v_0||}{||s \frac{p}{q_0}||}$$

eine bessere Approximation als v_0 .

Im folgenden setzen wir stets $v = s \frac{p}{q} \in V_n^m$ als gekürzt voraus

und definieren $\text{grad}(p) = -\infty$ und $q = 1$, falls $v = s \frac{p}{q} = 0$ ist.

Unter diesen Voraussetzungen definieren wir

$$d(v) := \min (m-\text{grad}(p), n-\text{grad}(q)). \quad (1.12)$$

Hilfssatz 2:

Sei $v = s \frac{p}{q} \in V_n^m$ und $\phi \in \Pi_{n+m-d(v)} - \Pi_{n+m-d(v)-1}$. Dann gibt es eine Zerlegung

$$\phi = \alpha p + \beta q$$

mit den Eigenschaften:

(a) Falls $d(v) < n-\text{grad}(q)$ ist, so ist $\alpha \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$ und

$$\beta \in \Pi_{\text{grad}(p)-1}.$$

(b) Falls $d(v) = n-\text{grad}(q)$ ist, so ist $\alpha \in \Pi_{\text{grad}(q)-1}$ und

$$\beta \in \Pi_m - \Pi_{m-1}.$$

Beweis:

(a) Da p und q teilerfremd sind, gibt es Polynome g und h mit

$$1 = gp + hq \quad \text{oder}$$

$$\phi = \phi gp + \phi hq .$$

Da $p \neq 0$ ist, gibt es nach dem Euklidischen Algorithmus ein Polynom β mit $\text{grad}(\beta) < \text{grad}(p)$ und

$$\phi h = \psi p + \beta .$$

Also gilt

$$\phi = p [\phi g + \psi q] + \beta q .$$

Setzen wir $\alpha := \phi q + \psi p \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$, so folgt die Aussage (a).

Den Fall (b) beweist man analog.

Hilfssatz 3:

Sei $a = -\infty$, $v_o = s \frac{p_o}{q_o} \in V_n^m$, $d(v_o) = m - \text{grad}(p_o)$, ∞ oder $-\infty \in M(v_o)$.

Außerdem seien (V1) und (S) erfüllt. Dann ist $m+n-d(v_o)$ eine gerade Zahl.

Beweis:

Es muß

$$\text{grad}(p_o) = \text{grad}(q_o) + k$$

sein. Daraus ergibt sich

$$m+n-d(v_o) = n+\text{grad}(p_o) = n+\text{grad}(q_o)+k$$

also die Behauptung.

Definition:

Eine Punktmenge $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_L$ in $[a, \infty]$ heißt eine Alternante der Länge L zu $f - v_0$, wenn

- (1) $x_i \in M(v_0)$ für $1 \leq i \leq L$,
- (2) $f(x_i) - v_0(x_i) = -(f(x_{i+1}) - v_0(x_{i+1}))$ für $1 \leq i \leq L-1$.

Satz 3:

(S) sei erfüllt und außerdem (V1) im Fall $m-n < k$. Dann gilt:

$v_0 = s \frac{p_0}{q_0}$ ist Minimallösung zu f

$\Leftrightarrow$ (1) $m-n=k$:

Es ist $f(\infty) - v_0(\infty) = -(f(-\infty) - v_0(-\infty))$ und $+\infty \in M(v_0)$

oder in $[a, \infty]$ existiert eine Alternante der Länge

$m+n+2-d(v_0)$ zu $f - v_0$.

(2) $m-n < k$:

(a) Falls $d(v_0) = n - \text{grad}(q_0)$ ist, dann existiert eine

Alternante der Länge $m+n+2-d(v_0)$ zu $f - v_0$ in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$.

(b) Falls $d(v_0) = m - \text{grad}(p_0) < n - \text{grad}(q_0)$ ist, dann existiert

in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$ eine Alternante der Länge $m+n+1-d(v_0)$ zu

$f - v_0$ und der größte Alternantenpunkt ist ein (+)-Punkt

(bzw. ein (-)-Punkt) von $f - v_0$, falls $\sigma(v_0, \infty) = 1$

(bzw. $\sigma(v_0, \infty) = -1$) ist.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Wir dürfen uns auf $\rho_{\frac{p}{q}}^m(f) > 0$ beschränken.

(1) $m-n=k$:

Hier ist $m+n+2-d(v_0) = n+k + \text{grad}(q_0) + 2$, also ist für $a = -\infty$ diese Zahl gerade.

Es sei $f(\infty) = v_0(\infty) \neq -(f(-\infty) - v_0(-\infty))$, falls $a = -\infty$ und $\infty \in M(v_0)$, und wir nehmen an, es existiere in $[a, \infty]$ eine Alternante der Länge $r \leq m+n+1-d(v_0)$, so daß man $[a, \infty]$ so in r Teilintervalle

$$[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_{r-1}, \infty] \quad (1.13)$$

unterteilen kann, daß mit $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ gilt:

$$\varepsilon(f(x) - v_0(x)) < \rho \quad \text{in } [a, \xi_1]$$

$$\varepsilon(f(x) - v_0(x)) > -\rho \quad \text{in } [\xi_1, \xi_2]$$

⋮

usw.

Nach Hilfssatz 1 gibt es einen endlichen Punkt $\xi \in [a, \infty] - M(v_0)$.

Wir wählen für $a \neq -\infty$ ein $\eta \in \mathbb{R}$ mit $\eta < a$. Für gerades r und $a = -\infty$ können nach Voraussetzung nicht beide Punkte ∞ und $-\infty$

in $M(v_0)$ liegen, also können wir dann $\eta \in \mathbb{R}$ so wählen, daß entweder $[\eta, \infty] \cap M(v_0) = \emptyset$ oder $[-\infty, \eta] \cap M(v_0) = \emptyset$.

Wir setzen nun

$$\phi(x) = Q(x)(x-\xi_1) \dots (x-\xi_{r-1}), \quad (1.14)$$

dabei ist

$$Q(x) = \begin{cases} (x-\xi)^{m+n+1-d(v_0)-r} & \text{für gerades } m+n+1-d(v_0)-r \\ (x-\xi)^{m+n-d(v_0)-r}(x-\eta) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist $\phi \in \Pi_{m+n-d(v_0)} - \Pi_{m+n-d(v_0)-1}$ und nach Hilfssatz 2 gibt es Polynome α und β mit $\text{grad}(\alpha) < \text{grad}(q_0)$ und $\text{grad}(\beta) = m$, so daß gilt:

$$\phi = \alpha p_0 + \beta q_0.$$

Wir betrachten

$$v_t = s \frac{p_0 \phi - t\beta}{q_0 \phi + t\alpha}, \quad (1.15)$$

wobei ϕ ein Polynom ist mit $\text{grad}(\phi) = n - \text{grad}(q_0)$ und $\phi(x) > 0$ in $[a, \infty]$. Da deshalb

$$\text{grad}(p_0 \phi) = \text{grad}(p_0) + n - \text{grad}(q_0) \leq m$$

ist, gibt es ein $t_0 > 0$, so daß $v_t \in V_n^m$ für alle $|t| \leq t_0$.

Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned} v_t - v_0 &= s \frac{p_0 \phi - t\beta}{q_0 \phi + t\alpha} - s \frac{p_0}{q_0} = s \frac{-t\alpha p_0 - t\beta q_0}{q_0 (q_0 \phi + t\alpha)} \\ &= -s \frac{t \phi}{q_0 (q_0 \phi + t\alpha)}. \end{aligned}$$

Damit ist für geeignet gewähltes $|t| \leq t_0$ die Bedingung

$$\min_{x \in M(v_0)} (f(x) - v_0(x)) (v_t(x) - v_0(x)) > 0$$

erfüllt. Nach Satz 2 ist v_0 keine Minimallösung.

(2a) $n\text{-grad}(q_0) \leq m\text{-grad}(p_0)$:

Da $\text{grad}(p_0) - \text{grad}(q_0) \leq m-n < k$ ist, so folgt aus (1.2), daß $v_0(\infty) = 0$ und zusätzlich $v_0(-\infty) = 0$, falls $a = -\infty$ ist. Deshalb sind $\pm \infty$ keine Extrempunkte von $f - v_0$. Nehmen wir an, es gebe in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$ höchstens eine Alternante der Länge $r \leq m+n+1-d(v_0)$, so daß man $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$ in r Teilintervalle wie in (1.13) unterteilen kann mit

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot (f(x) - v_0(x)) &< \rho && \text{in } [\xi_{r-1}, \infty) \\ -\varepsilon \cdot (f(x) - v_0(x)) &< \rho && \text{in } [\xi_{r-2}, \xi_{r-1}] \\ &\vdots && \\ &\vdots && \\ (-1)^{r-1} \varepsilon \cdot (f(x) - v_0(x)) &< \rho && \text{in } [a, \xi_1] \cap \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dabei ist $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$.

Wir wählen einen Punkt $\xi \in [a, \infty)$, so daß $[\xi, \infty) \cap M(v_0) = \emptyset$.

Setzen wir $\eta := \xi$ und definieren wir ϕ wie in (1.14) und v_t wie in (1.15), so erhalten wir auf die gleiche Art wie unter (1) einen Widerspruch.

(2b) $m\text{-grad}(p_0) < n\text{-grad}(q_0)$:

Wir beschränken uns auf $\sigma(v_0, \infty) = 1$. Zunächst bemerkt man:

Ist $\pm \infty \in M(v_0)$, so ist wegen (V1)

$$\text{grad}(p_0) = \text{grad}(q_0) + k, \tag{1.17}$$

und $\pm \infty$ ist ein $(-)$ -Punkt von $f - v_0$.

Wir unterscheiden :

(α) Nehmen wir an, es gebe eine Alternante der maximalen Länge $r \leq m+n+1-d(v_0)$ in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$, jedoch der größte Alternantenpunkt sei ein (-)-Punkt von $f - v_0$.

Wie in (2a) unterteilen wir $[a, \infty]$ in r Teilintervalle mit der Eigenschaft (1.16) und $\varepsilon = +1$. Wir wählen wieder einen endlichen Punkt $\xi \in [a, \infty] - M(v_0)$ und definieren ϕ wie in (1.14). Dazu müssen wir jetzt noch $\eta \in \mathbb{R}$ festlegen:

Falls $a \neq -\infty$, so wählen wir $\eta < a$. Falls $a = -\infty$, so wählen wir η derart, daß für $x \leq \eta$

$$f(x) - v_0(x) < \rho$$

gilt. Ist dann $-\infty \in M(v_0)$, so brauchen wir nach Hilfssatz 3 η nur dann in (1.14), wenn r gerade ist; dadurch ist $\phi(-\infty) > 0$ gewährleistet.

Nach Hilfssatz 2 gibt es Polynome α und β mit $\text{grad}(\alpha) = n$ und $\text{grad}(\beta) < \text{grad}(p_0)$, so daß gilt:

$$\phi = \alpha p_0 + \beta q_0.$$

Definieren wir

$$v_t = s \frac{p_0 - t\beta}{q_0 + t\alpha}, \quad (1.18)$$

so ist $v_t \in V_n^m$ für $0 \leq t \leq t_0$ für ein geeignetes $t_0 > 0$.

Außerdem gilt

$$v_t - v_0 = -s \frac{t \phi}{q_0(q_0 + t\alpha)}. \quad (1.19)$$

Ist $\pm^\infty \in M(v_0)$, so gilt wegen (1.17)

$$\begin{aligned}\text{grad}(\phi) &= m+n-d(v_0) = n + \text{grad}(p_0) \\ &= n + \text{grad}(q_0) + k \\ &= \text{grad} [q_0(q_0 + t^\alpha)] + k.\end{aligned}$$

Deshalb ist für $0 < t \leq t_0$ die notwendige Bedingung des Satzes 2 für v_t nicht erfüllt. v_0 ist also keine Minimallösung.

(8) Nehmen wir an, es gebe eine Alternante der maximalen Länge $r \leq m+n-d(v_0)$ in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$, jedoch der größte Alternantenpunkt ist ein (+)-Punkt von $f - v_0$. Dann unterteilen wir $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$ in r Teilintervalle mit der Eigenschaft (1.16) und $\varepsilon = -1$. Wir wählen ein endliches $\xi \in [a, \infty] - M(v_0)$ und $\eta > 0$ so, daß

$$f(x) - v_0(x) < \rho \quad \text{für } x \in [a, \infty] \text{ mit } |x| > \eta$$

gilt. ϕ definieren wir wie in (1.14), jedoch mit

$$Q(x) = \begin{cases} (x-\xi)^{m+n-d(v_0)-r} (x-\eta), & \text{falls } m+n-d(v_0)-r \text{ gerade} \\ (x-\xi)^{m+n-d(v_0)-r-1} (x^2-\eta^2) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wieder existieren Polynome α und β mit $\text{grad}(\alpha) = n$ und $\text{grad}(\beta) < \text{grad}(p_0)$, so daß

$$\phi = \alpha p_0 + \beta q_0$$

ist. Definieren wir v_t wie in (1.18), dann ist für $0 \leq t \leq t_0$ mit $t_0 > 0$ die Funktion $v_t \in V_m^n$ und es gilt (1.19).

Man erhält damit wieder einen Widerspruch zu Satz 2.

"<=": Ist $a = -\infty, \infty \in M(v_0)$ und $f(\infty) - v_0(\infty) = -(f(-\infty) - v_0(-\infty))$,
so folgt wegen

$$\frac{v_0(\infty) - v(\infty)}{S(\infty)} = \frac{v_0(-\infty) - v(-\infty)}{S(-\infty)}$$

für alle $v \in V_n^m$, daß v_0 Minimallösung ist.

Im zweiten Teil von (1) und bei (2a) folgt dies wie in der klassischen Theorie. Übrig bleibt der Fall (2b), wobei wir o.B.d.A. $\sigma(v_0, \infty) = 1$ voraussetzen.

Nehmen wir an, es gäbe eine bessere Approximation als v_0 , nämlich $v_1 = s \frac{p_1}{q_1}$. Dann hat

$$s \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0} \right) = \left(f - s \frac{p_0}{q_0} \right) - \left(f - s \frac{p_1}{q_1} \right)$$

in den Alternantenpunkten $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m+n-d(v_0)}$ von

$f - v_0$ dasselbe Vorzeichen wie $f - v_0$, also hat $p_1 q_0 - p_0 q_1$ auch $n+m-d(v_0) = n + \text{grad}(p_0)$ Nullstellen in $(x_0, x_{m+n-d(v_0)})$.

Damit ist $q_1 \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$. Das Vorzeichen von $(p_1 q_0 - p_0 q_1)(x_{m+n-d(v_0)})$ bestimmt sich aus dem negativen Koeffizienten bei der höchsten Potenz von $-p_0 q_1$. Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$\text{sgn}(f - v_0)(x_{m+n-d(v_0)}) = +1.$$

Bemerkung:

Im Fall $m=n=k$ wurde diese Charakterisierung für $k > 0$, $S(\infty) = S(-\infty)$, $f(\infty) = f(-\infty)$ von Achieser [1] angegeben. Dann reduziert sich (1) zur Alternantenbedingung.

Ist für $m-n < k$ (V1) verletzt, so braucht der Satz nicht zu gelten.

Dazu

Beispiel 2:

Wir approximieren mit $s(x) \equiv 1$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

über $[0, \infty]$ bezüglich V_1^0 . Dann ist $\frac{3}{x+1}$ Minimallösung, es existiert jedoch nur ein Extrempunkt zu $f - v_0$.

Setzen wir

$$L(v_0) := \begin{cases} m+n+2-d(v_0), & \text{falls } d(v_0) = n - \text{grad}(q_0) \\ m+n+1-d(v_0), & \text{falls } d(v_0) = m - \text{grad}(p_0) < n - \text{grad}(q_0) \end{cases} \quad (1.20)$$

so ist $L(v_0)$ die Länge einer charakteristischen Alternante einer minimalen Fehlerfunktion $f - v_0$.

Untersuchen wollen wir nun die Eindeutigkeit der Minimallösung.

Dazu benötigen wir für $m-n=k$ die Bedingung

(V2): Für $a = -\infty$ existiere eine Minimallösung v_0 zu f , so daß $f - v_0$ entweder in $(-\infty, \infty]$ oder in $[-\infty, \infty)$ eine Alternante der Länge $L(v_0)$ besitzt.

Satz 4:

(S) sei erfüllt, außerdem im Fall $m-n < k$ die Bedingung (V1) und im Fall $m-n=k$ die Bedingung (V2). Dann gibt es genau eine Minimallösung zu f bezüglich V_n^m .

Beweis:

Seien $v_0 = s \frac{p_0}{q_0}$ und $v_1 = s \frac{p_1}{q_1}$ zwei Minimallösungen zu f und $x_1 < x_2 < \dots < x_{L(v_0)}$ eine Alternante der Länge $L(v_0)$ zu $f - v_0$ wie in Satz 3 bzw. (V2). Dann ist

$$\operatorname{sgn} \left(s \frac{q_0 p_1 - p_0 q_1}{q_0 q_1} \right) (x_i) = \begin{cases} \operatorname{sgn} (f - v_0) (x_i) \\ \text{oder} \\ 0 \end{cases}$$

für $1 \leq i \leq L(v_0)$. Also hat $s \frac{q_0 p_1 - p_0 q_1}{q_0 q_1}$ mindestens $L(v_0) - 1$ Nullstellen in $[x_1, x_{L(v_0)}]$, wenn man Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel doppelt zählt.

(a) $d(v_0) = n - \operatorname{grad}(q_0)$:

Liegen diese Nullstellen sogar in $(-\infty, \infty)$ (was immer bei $m-n < k$ der Fall ist), so besitzt $q_0 p_1 - p_0 q_1$ damit $L(v_0) - 1 = m+n+1-d(v_0)$ Nullstellen in $(-\infty, \infty)$. Da $q_0 p_1 - p_0 q_1 \in \Pi_{m+n-d(v_0)}$ ist, folgt $v_0 = v_1$.

Ist dagegen $m-n = k$ und $\pm \infty$ Nullstelle von $s \frac{q_0 p_1 - p_0 q_1}{q_0 q_1}$, so muß

$$\operatorname{grad}(q_0 p_1 - p_0 q_1) < \operatorname{grad}(q_0 q_1) + k$$

sein. Da $d(v_0) = n - \operatorname{grad}(q_0)$ und $d(v_1) = n - \operatorname{grad}(q_1)$ ist, und wir o.B.d.A. $d(v_0) \leq d(v_1)$ annehmen dürfen, folgt

$$\operatorname{grad}(q_0 q_1) + k \leq 2 \operatorname{grad}(q_0) + k \leq m + \operatorname{grad}(q_0) .$$

Also ist $q_0 p_1 - p_0 q_1 \in \Pi_{m+n-d(v_0)-1}$ und besitzt in $(-\infty, \infty)$ mindestens $m+n-d(v_0)$ Nullstellen einschließlich Vielfachheit.

Daher muß $v_0 = v_1$ sein.

(b) $d(v_0) = m - \text{grad}(p_0) < n - \text{grad}(q_0)$ und

$d(v_1) = m - \text{grad}(p_1) < n - \text{grad}(q_1)$:

Da $q_0 p_1 - p_0 q_1$ in $(-\infty, \infty)$ $n + \text{grad}(p_0)$ Nullstellen einschließlich Vielfachheit besitzt, dagegen $\text{grad}(q_0 p_1 - p_0 q_1) < n + \text{grad}(p_0)$ ist, folgt daraus: $v_0 = v_1$.

Durch ein Beispiel wollen wir zeigen, daß die Minimallösung nicht mehr eindeutig zu sein braucht, wenn für $m=n=k$ die Bedingung (V2) nicht erfüllt.

Beispiel 3:

Wir betrachten über $[-\infty, \infty]$ die Funktion $s(x) \equiv 1$ und v_2^2 und setzen

$$v_0(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$v_1(x) = \frac{x^2 + 0.25 x}{x^2 + 0.5 x + 1}.$$

Dann hat $v_1 - v_0$ die Nullstellen $\{-\infty, -1, 0, 1, \infty\}$. Man kann nun leicht eine Funktion f angeben, so daß v_0 Minimallösung zu f mit der Alternante $\{-\infty, -1, 0, 1, 2, \infty\}$ und gleichzeitig v_1 ebenfalls Minimal-lösung ist. Dabei beachte man, daß

$$f(\infty) - v_0(\infty) = f(\infty) - v_1(\infty) = -[f(-\infty) - v_1(-\infty)] = -[f(-\infty) - v_0(-\infty)].$$

Falls $m=n < k$ ist und (V1) verletzt ist, so braucht die Minimal-lösung, wie man an Beispiel 1 sieht, nicht mehr eindeutig zu sein.

Wir wollen noch untersuchen, wie man ausschließen kann, daß der Fall (2b) in Satz 3 auftritt. Anders ausgedrückt, wann ist die übliche Zahl von Alternantenpunkten für $m-n < k$ garantiert?

Satz 5:

Es seien $m-n < k$, (S) und (V1) erfüllt und es gelte $\frac{f(x)}{s(x)} x^{n-1} = o(1)$ für $x \rightarrow \infty$. Für $0 \leq v \leq m$ habe der lineare Raum, der von Funktionen

$$1, x, x^2, \dots, x^v, \frac{f(x)}{s(x)}, \frac{f(x)}{s(x)}x, \dots, \frac{f(x)}{s(x)}x^{n-1}$$

aufgespannt wird, die Dimension $n+v+1$ und erfülle über

$[a, \infty] \cap (-\infty, \infty)$ die Haarsche Bedingung. Dann ist bei der Minimal-
lösung $v_0 = s \frac{p_0}{q_0}$ (teilerfremde Darstellung) zu f die Zahl
 $d(v_0) = n - \text{grad}(q_0)$, d.h. v_0 wird durch eine Alternante
der Länge $n+m+2-d(v_0)$ charakterisiert.

Beweis:

Nehmen wir $d(v_0) = m - \text{grad}(p_0) < n - \text{grad}(q_0)$ an. Nach Satz 3
gibt es zu $f - v_0$ eine Alternante

$$-\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_{n+m-d(v_0)} < \infty$$

der Länge $n+m-d(v_0)$ und

$$\text{sgn}(f-v_0)(x_{n+m-d(v_0)}) = \sigma(v_0, \infty).$$

Dann hat $\frac{f}{s} q_0 - p_0$ in $(x_0, x_{n+m-d}(v_0))$ mindestens $n + \text{grad}(p_0)$ Nullstellen. Wegen $\frac{f(x)}{s(x)} x^{n-1} = o(1)$ für $x \rightarrow \infty$ muß aber noch eine Nullstelle $\xi > x_{n+m-d}(v_0)$ existieren. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß eine nichttriviale Linearkombination von

$$1, x, x^2, \dots, x^{\text{grad}(p_0)}, \frac{f(x)}{s(x)}, \frac{f(x)}{s(x)}x, \dots, \frac{f(x)}{s(x)}x^{n-1}$$

höchstens $n + \text{grad}(p_0)$ Nullstellen in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$ hat.

2. Stetigkeitseigenschaften der Minimallösungen

Wir betrachten $f \in C[a, \infty]$ unter den Voraussetzungen von Satz 4, d.h. die Minimallösung v_f zu f ist eindeutig bestimmt, und stellen uns die Frage:

Unter welchen Bedingungen konvergieren die Minimallösungen v_g zu g gegen v_f , wenn g gegen f konvergiert?

Sei wieder $[\alpha, \alpha+1]$ ein beschränktes Intervall in $[a, \infty]$ und

$$\|g\|_1 := \max_{x \in [\alpha, \alpha+1]} |g(x)| \quad \text{für } g \in C[\alpha, \alpha+1]. \quad (2.1)$$

Hilfssatz 4:

Sei $q \in \Pi_n - \Pi_{n-2}$ mit $q(x) > 0$ in $[a, \infty]$, $\{q_i\}$ eine Folge in Π_n mit $q_i(x) > 0$ in $[a, \infty]$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} \|q - q_i\|_1 = 0$. Dann gibt es zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ einen Index $i(\varepsilon)$, so daß $q_i(x) \geq \varepsilon \cdot q(x)$ für alle $x \in [a, \infty]$ und $i \geq i(\varepsilon)$.

Beweis:

Wir können annehmen, daß $\text{grad}(q_i) \geq \text{grad}(q)$ ist für $i = 1, 2, \dots$.

(a) $q \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$:

Wir betrachten für q_i die Darstellung

$$q_i(x) = \gamma_n^{(i)} \prod_{j=1}^n (x - x_j^{(i)}) \quad (2.2)$$

und für q die Darstellung

$$q(x) = \gamma_n \prod_{j=1}^n (x - x_j). \quad (2.3)$$

Dann ist $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_n^{(i)} = \gamma_n > 0$, und wir können durch Umordnen erreichen, daß für $1 \leq j \leq n$ $\lim_{i \rightarrow \infty} x_j^{(i)} = x_j$ gilt (Marden [6]).

Wir setzen $\eta := \frac{n+1}{\sqrt{\epsilon}}$ und wählen i_0 so, daß $\gamma_n^{(i)} \geq \eta \cdot \gamma_n$ und $|x_j - x_j^{(i)}| \leq 1/\eta$ für $i \geq i_0$ und $1 \leq j \leq n$. Dann gilt für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| \geq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| + 1$ und für $i \geq i_0$:

$$q_i(x) \geq \eta \cdot \gamma_n \prod_{j=1}^n |x - x_j| \left(1 - \left| \frac{x_j - x_j^{(i)}}{x - x_j} \right| \right)$$

$$\geq \eta^{n+1} q(x) = \epsilon \cdot q(x).$$

Außerdem gibt es einen Index $i_1 > 0$, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| + 1$ und $i \geq i_1$ ebenfalls $q_i(x) \geq \epsilon \cdot q(x)$ gilt. Der Index $i(\epsilon) = \max(i_0, i_1)$ liefert somit die gewünschte Beziehung.

(b) $q \in \Pi_{n-1}$:

Setzen wir $q_i(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j^{(i)} x^j + \gamma_n^{(i)} x^n$, dann ist $\gamma_n^{(i)} \geq 0$ und es gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} \|q - \tilde{q}_i\|_1 = 0$ für

$$\tilde{q}_i(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j^{(i)} x^j.$$

Wie unter (a) zeigt man, daß es einen Index i_0 gibt mit $\tilde{q}_i(x) \geq \epsilon \cdot q(x)$ für $x \in [a, \infty]$ und $i \geq i_0$. Weiterhin gibt es eine Konstante $K > 0$, so daß $q_i(x) \geq \tilde{q}_i(x)$ für alle $x \in [a, \infty]$ mit $|x| \geq K$.

Da auf einem beschränkten Intervall die geforderte Ungleichung trivial ist, folgt somit wieder die Behauptung.

Hilfssatz 5:

Sei $q \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$ mit $q(x) > 0$ in $[a, \infty]$, $\{q_i\}$ wie in Hilfssatz 4. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so daß für alle $x \in [a, \infty]$ die Beziehung $q(x) \geq \delta \cdot q_i(x)$ für alle $i = 1, 2, \dots$ erfüllt ist.

Beweis:

Für jedes i gibt es ein $\delta_i > 0$ mit

$$q(x) \geq \delta_i q_i(x) \quad \text{für alle } x \in [a, \infty].$$

Also können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\text{grad}(q_i) = n$ ist für alle i . Wir betrachten für q_i bzw. q die Produktdarstellung (2.2) bzw. (2.3) mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_n^{(i)} = \gamma_n > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_j^{(i)} = x_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq n.$$

Wählen wir i_0 so, daß $\gamma_n^{(i)} \leq 2 \gamma_n$ und $|x_j - x_j^{(i)}| \leq 1$ ist für $i \geq i_0$ und $1 \leq j \leq n$, dann gilt für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| \geq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| + 1$ und $i \geq i_0$:

$$\begin{aligned} q_i(x) &\leq 2 \gamma_n \prod_{j=1}^n (x - x_j) \left(1 + \left| \frac{x_j - x_j^{(i)}}{x - x_j} \right| \right) \\ &\leq 2^{n+1} \cdot q(x). \end{aligned}$$

Außerdem existiert eine Konstante $\tilde{\delta} > 0$, so daß für $x \in [a, \infty]$ mit $|x| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| + 1$ die Ungleichung $q(x) \geq \tilde{\delta} \cdot q_i(x)$ für $i = 1, 2, \dots$ erfüllt ist. Die Konstante

$$\delta := \min (\tilde{\delta}, 2^{-n-1}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{i_0})$$

liefert die endgültige Beziehung.

Sind die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt (d.h. die Minimal-
lösung ist eindeutig), dann heißt f normal, wenn für die Minimal-
lösung v zu f die Zahl $d(v) = 0$ ist. In den nächsten beiden Hilfs-
sätzen zeigen wir für Minimalfolgen Eigenschaften, die sich bei
der Approximation auf einem beschränkten Intervall aus dem strengen
Eindeutigkeitssatz ergeben (Cheney [4]).

Hilfssatz 6:

Es sei $m-n < k$, (S) und (V1) erfüllt, f normal, $v = s \frac{p}{q}$ Minimal-
lösung zu f mit $\text{grad}(q) \geq n-1$. Weiterhin gelte $\text{grad}(q) \geq m-k+1$
oder $f-v$ habe in $[a, \infty]$ keine Alternante der Länge $m+n+2$. Ist nun
 $\{f_i\}$ eine Folge in $C[a, \infty]$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f-f_i\| = 0$ und $\{v_i\}$ eine
zugehörige Folge von Minimallösungen bezüglich V_n^m , dann gibt es
eine Konstante $\gamma > 0$, so daß

$$\|f-v_i\| \geq \|f-v\| + \gamma \cdot \|v-v_i\|$$

für $i = 1, 2, \dots$ gilt.

Beweis:

Wegen $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f-f_i\| = 0$ folgt $\rho_{V_n^m}(f) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{V_n^m}(f_i)$. Aus

$$\|f-v_i\| \leq \|f-f_i\| + \|f_i-v_i\|$$

ergibt sich:

$\{v_i\}$ ist eine Minimalfolge zu f .

Wir definieren für $v_i \neq v$

$$\gamma(v_i) := \frac{\|f-v_i\| - \|f-v\|}{\|v-v_i\|} \quad (2.4)$$

Nehmen wir an, die Behauptung wäre falsch.

Dann muß $f \neq v$ sein, und wir können o.B.d.A. voraussetzen, daß

$$v_i \neq v \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(v_i) = 0, \quad (2.6)$$

$$v_i = s \frac{p_i}{q_i} \text{ mit } \|q_i\|_1 = 1, \lim_{i \rightarrow \infty} \|p - p_i\|_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{und } \lim_{i \rightarrow \infty} \|q - q_i\|_1 = 0.$$

Sei nun $x_1 < x_2 < \dots < x_{L(v)}$ eine Alternante zu $f-v$ in $\mathbb{R}$, d.h.

$$f(x_v) - v(x_v) = (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot \|f-v\|$$

für $1 \leq v \leq L(v)$ mit $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$.

Dann gilt für $1 \leq v \leq L(v)$:

$$\begin{aligned} \gamma(v_i) \|v-v_i\| &= \|f-v_i\| - \|f-v\| \\ &\geq (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot (f-v_i)(x_v) - (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot (f-v)(x_v) \\ &= (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot (v-v_i)(x_v). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wir behaupten:

$$\max_{1 \leq v \leq L(v)} (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot (v-v_i)(x_v) > 0. \quad (2.9)$$

Zum Beweis nehmen wir indirekt an, es sei für $1 \leq v \leq L(v)$

$$(-1)^v \cdot \epsilon \cdot (v-v_i)(x_v) \leq 0 \quad (2.10)$$

und unterscheiden die Fälle:

(a) $\text{grad}(q) = n$, d.h. $L(v) = m+n+2$:

Dann hätte $(v-v_i)(x)$ mindestens $m+n+1$ endliche Nullstellen einschließlich Vielfachheit. Dies ist aber nicht möglich.

(b) $\text{grad}(q) = n-1$, d.h. $L(v) = m+n+1$:

Sei j der Index mit

$$\begin{aligned} (v-v_i)(x_j) &\neq 0 \quad \text{und} \\ (v-v_i)(x_v) &= 0 \quad \text{für } v = j+1, j+2, \dots, L(v). \end{aligned}$$

Aus (2.10) folgt:

$$\text{sgn}(v-v_i)(x_j) = -(-1)^j \cdot \epsilon.$$

In $[x_1, x_j)$ hat $v-v_i$ mindestens $j-1$ Nullstellen einschließlich Vielfachheit. Hätte $v-v_i$ in (x_j, ∞) nur Nullstellen in $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{L(v)}$ und wären alle diese Nullstellen einfach, dann wäre

$$\begin{aligned} \text{sgn}(v-v_i)(x) &= -(-1)^{L(v)} \cdot \epsilon \quad \text{oder} \\ \sigma(v, \infty)(v-v_i)(x) &< 0 \quad \text{für } x > x_{L(v)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nun ist aber

$$v-v_i = s \frac{p}{q} - s \frac{p_i}{q_i} = s \frac{p q_i - p_i q}{q q_i}.$$

Da $v-v_i \neq 0$ ist und mindestens $L(v)-1$ Nullstellen besitzt, muß $p q_i - p_i q \in \Pi_{m+n}$ sein, d.h. $q_i \in \Pi_n$ und damit $\sigma(v, \infty)(v-v_i)(x) > 0$ für genügend großes x . Dies ist somit ein Widerspruch zu (2.11), also hat $v-v_i$ mindestens $L(v)$ endliche Nullstellen, was aber wiederum unmöglich ist.

Damit haben wir (2.9) gezeigt.

Wir betrachten jetzt

$$w_i = p q_i - p_i q = \sum_{j=0}^{n+m} \beta_j^{(i)} x^j \in \Pi_{n+m}$$

und definieren mit $\beta^{(i)} := \max_{0 \leq j \leq n+m} |\beta_j^{(i)}|$:

$$\widetilde{w}_i = \frac{w_i}{\beta^{(i)}}.$$

Wir wählen $\mu = \mu(i)$ so, daß

$$\max_{1 \leq v \leq L(v)} (-1)^v \in \widetilde{w}_i(x_v) = (-1)^\mu \in \widetilde{w}_i(x_\mu) > 0.$$

Durch eventuellen Übergang zu einer Teilfolge von $\{v_i\}$ können wir annehmen, daß der Index μ für jedes i der gleiche ist.

Wir behaupten jetzt, es gibt ein $\kappa > 0$ mit

$$(-1)^\mu \in \widetilde{w}_i(x_\mu) \geq \kappa \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Denn gäbe es ein solches κ nicht, dann würde eine Teilfolge $\{\widetilde{w}_{i_j}\}$ und ein $\widetilde{w} \in \Pi_{n+m}$ existieren mit den Eigenschaften:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\widetilde{w}_{i_j} - \widetilde{w}\|_1 = 0, \quad (2.13)$$

$$(-1)^v \in \widetilde{w}(x_v) \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq v \leq L(v). \quad (2.14)$$

Wie vorhin bei (2.10) zeigt man, daß (2.14) nicht möglich ist, da ein Koeffizient von $\tilde{w}$ vom Betrag ist.

Da $\text{grad}(q) \geq n-1$ ist, gibt es nach Hilfssatz 4 für $0 < \epsilon_0 < 1$ einen Index i_0 mit

$$q_i(x) \geq \epsilon_0 \cdot q(x) \quad \text{für } i \geq i_0 \text{ und } x \in [a, \infty].$$

Deshalb gilt für $x \in [a, \infty]$ und $i \geq i_0$:

$$\begin{aligned} \frac{|(v-v_i)(x)|}{(-1)^u \epsilon \cdot (v-v_i)(x_\mu)} &= \frac{(q \cdot q_i)(x_\mu) \cdot s(x) \cdot |w_i(x)|}{s(x_\mu) |w_i(x_\mu)| (q \cdot q_i)(x)} \\ &\leq \frac{(q \cdot q_i)(x_\mu)}{\epsilon_0 s(x_\mu) |\tilde{w}_i(x_\mu)|} s(x) \frac{|\tilde{w}_i(x)|}{[q(x)]^2} \\ &\leq K \cdot s(x) \cdot \frac{|\tilde{w}_i(x)|}{[q(x)]^2} \\ &\leq K \cdot s(x) \cdot \frac{\sum_{j=0}^{\text{grad}(\tilde{w}_i)} |x|^j}{[q(x)]^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit einer Konstanten K .

Wir behaupten weiter:

Es gibt einen Index $i_1 \geq i_0$ mit

$$\text{grad}(\tilde{w}_i) \leq \text{grad}(q^2) + k \quad \text{für } i \geq i_1. \quad (2.16)$$

Wenn wir dies gezeigt haben, so gibt es wegen (2.15) eine Konstante $K^* > 0$ mit

$$\frac{|(v-v_i)(x)|}{(-1)^u \epsilon \cdot (v-v_i)(x_\mu)} \leq \frac{1}{K^*}$$

für $x \in [a, \infty]$ und $i \geq i_1$. Daher folgt aus (2.8):

$$\begin{aligned} \gamma(v_i) \quad ||v-v_i|| &\geq (-1)^{j_i} \epsilon \cdot (v-v_i)(x_{j_i}) \\ &\geq K^* \quad ||v-v_i|| \end{aligned}$$

für $i \geq i_1$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(v_i) = 0$ und damit der Hilfssatz bewiesen.

Nachzutragen bleibt der Beweis von (2.16). Dazu unterscheiden wir:

$$(a) \quad \text{grad}(q) \geq m-k+1:$$

Da

$$n+m = m-k+1+n-1+k \leq \text{grad}(q^2) + k$$

und $\tilde{w}_i \in \Pi_{n+m}$ ist, folgt (2.16) für $i = 1, 2, \dots$.

(b) $\text{grad}(q) = m-k$ und $f-v$ habe in $[a, \infty]$ keine Alternante der Länge $m+n+2$:

Da $\text{grad}(q) = m-k = n-1$ ist, existiert zu $f-v$ in $[a, \infty)$ eine Alternante der Länge $m+n+1$ und der größte Alternantenpunkt ist ein $(+)$ -Punkt für $\sigma(v, \infty) = \pm 1$. Außerdem muß $a > -\infty$ sein.

Wenn wir gezeigt haben, daß für alle genügend großen i

$$\text{grad}(q_i) = n-1 \tag{2.17}$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} \text{grad}(\tilde{w}_i) &\leq m+n-1 = m-k+n-1+k \\ &= \text{grad}(q^2) + k, \end{aligned}$$

also (2.16).

Um (2.17) zu zeigen, nehmen wir indirekt an, es gebe eine Teilfolge $\{v_{i_j}\} = \{s \frac{p_{i_j}}{q_{i_j}}\}$ mit $\text{grad}(q_{i_j}) = n$ für $j = 1, 2, \dots$. Aus (2.7) folgt o.B.d.A.: $\text{grad}(p_{i_j}) = m$. Dann muß also zu $f - v_{i_j}$ eine Alternante der Länge $m+n+2$, nämlich

$$a \leq x_1^{(j)} < x_2^{(j)} < \dots < x_{m+n+2}^{(j)} < \infty$$

existieren. Betrachten wir die Folge $\{(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{m+n+2}^{(j)})\}$, so existiert ein Häufungspunkt

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n+2}) \in [a, \infty]^{m+n+2}$$

mit $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{m+n+2}$.

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{m+n+2}^{(j)}) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+n+2})$$

und unterscheiden

$$(b1) \quad \xi_{m+n+1} = \infty:$$

Zunächst sei $\sigma(v, \infty) = +1$.

Dann gibt es einen Index $\delta = \delta(j) \in \{m+n+1, m+n+2\}$ mit

$$(f_{i_j} - v_{i_j})(x_{\delta}^{(j)}) = -o_{V_n^m}(f_{i_j}).$$

Daraus folgt durch Grenzübergang $j \rightarrow \infty$:

$$f(\infty) - \lim_{j \rightarrow \infty} v_{i_j}(x_{\delta}^{(j)}) = -o_{V_n^m}(f). \quad (2.18)$$

Zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ gibt es nach Hilfssatz 4 eine Zahl $i(\varepsilon)$ mit $q_{i_j}(x) \geq \varepsilon q(x)$ für alle $x \in [a, \infty]$ und $i_j \geq i(\varepsilon)$. Deshalb gibt es eine Konstante A , so daß für alle $x \geq A$ und alle $i_j \geq i(\varepsilon)$ gilt:

$$v_{i_j}(x) = s(x) \cdot \frac{p_{i_j}(x)}{q_{i_j}(x)} \leq \frac{1}{\varepsilon} s(x) \frac{p_{i_j}(x)}{q(x)}.$$

Also ergibt sich

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_{i_j}(x_\delta^{(j)}) \leq v(\infty)$$

oder nach (2.18):

$$f(\infty) - v(\infty) \leq -\rho_{V_n^m}(f).$$

∞ ist somit ein $(-)$ -Punkt von $f-v$, also existiert in $[a, \infty]$ eine Alternante der Länge $m+n+2$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Den Fall $\sigma(v, \infty) = -1$ behandelt man analog.

(b2) $\xi_{m+n+1} < \infty$:

Zunächst sei wieder $\sigma(v, \infty) = +1$.

Da $\lim_{j \rightarrow \infty} v_{i_j}(x_v^{(j)}) = v(\xi_v)$ für $v = 1, 2, \dots, m+n+1$ ist, gilt somit

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m+n+1}$$

und die ξ_i liefern eine Alternante der Länge $m+n+1$ von $f-v$. Wäre ξ_{m+n+1} ein $(-)$ -Punkt von $f-v$, dann gäbe es auf Grund des Alternantensatzes sogar eine Alternante der Länge $m+n+2$ in $[a, \infty)$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also muß ξ_{m+n+1} ein $(+)$ -Punkt von $f-v$ sein. Dann ist aber ξ_{m+n+2} ein $(-)$ -Punkt von $f-v$, also gibt es in $[a, \infty]$ eine Alternante der Länge $m+n+2$. Dies ist ein Widerspruch. $\sigma(v, \infty) = -1$ wird analog behandelt.

Damit ist (2.16) bewiesen.

Hilfssatz 7:

Es sei $m-n=k$, außerdem seien (S) und (V2) erfüllt und f normal.

Ist v die Minimallösung zu f und $\{v_i\}$ eine Minimalfolge zu f ,

dann gibt es eine Konstante $\gamma > 0$, so daß

$$||f-v_i|| \geq ||f-v|| + \gamma ||v-v_i||$$

für $i = 1, 2, \dots$ erfüllt ist.

Beweis:

Wir definieren wieder $\gamma(v_i)$ wie in (2.4) und nehmen indirekt

(2.5) - (2.7) an.

Sei nun $x_1 < x_2 < \dots < x_{m+n+2}$ eine Alternante zu $f-v$, d.h.

$$f(x_v) - v(x_v) = (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot ||f-v||$$

für $1 \leq v \leq m+n+2$ ($\varepsilon=+1$ oder $\varepsilon=-1$).

Dabei ist mindestens einer der Punkte x_1, x_{m+n+2} endlich.

Definieren wir

$$G := \left\{ s \frac{p\tilde{q} - \tilde{p}q}{2} \mid \tilde{p} \in \Pi_m, \tilde{q} \in \Pi_n \right\},$$

dann ist G ein endlichdimensionaler Unterraum von $C[a, \infty]$. Wir

behaupten für $g \in G$ und $g \neq 0$:

$$\max_{1 \leq v \leq m+n+2} (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot g(x_v) > 0. \quad (2.19)$$

Nehmen wir nämlich an, es gebe ein $g = s \frac{p\tilde{q} - \tilde{p}q}{2} + 0$ in G mit

$$(-1)^v \cdot \varepsilon \cdot g(x_v) \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq v \leq m+n+2.$$

Dann hat g mindestens $m+n+1$ Nullstellen einschließlich Vielfachheit in $[x_1, x_{m+n+2}]$. Liegen diese Nullstellen sogar in $(-\infty, \infty)$, so ist dies schon ein Widerspruch zu $p\tilde{q} - \tilde{p}q \in \Pi_{n+m}$. Ist dagegen $\pm \infty$ Nullstelle von g , so muß gelten:

$$\text{grad}(p\tilde{q} - \tilde{p}q) < \text{grad}(q^2) + k = 2n+k = m+n.$$

Also hätte $p\tilde{q} - \tilde{p}q \in \Pi_{m+n-1}$ in $(-\infty, \infty)$ mindestens $m+n$ Nullstellen, was aber nicht möglich ist. Damit ist (2.19) richtig und

$$c := \inf_{\substack{g \in G \\ ||g||=1}} \max_{1 \leq v \leq m+n+2} (-1)^v \cdot \varepsilon \cdot g(x_v) > 0$$

Also existiert ein Alternantenpunkt $\mu = \mu(i)$ mit

$$\begin{aligned} \gamma(v_i) \quad ||v-v_i|| &\geq (-1)^\mu \cdot \varepsilon \cdot (v-v_i)(x_\mu) \\ &= (-1)^\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{q(x_\mu)}{q_i(x_\mu)} \left[s \frac{pq_i - p_i q}{q^2} \right](x_\mu) \\ &\geq c \frac{q(x_\mu)}{q_i(x_\mu)} \left| \left| s \frac{pq_i - p_i q}{q^2} \right| \right| \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sei nun $0 < \varepsilon_0 < 1$, dann gibt es nach Hilfssatz 4 einen Index i_0 mit $q_i(x) \geq \varepsilon_0 \cdot q(x)$ für alle $x \in [a, \infty]$ und $i \geq i_0$. Nach Hilfssatz 5 existiert ein $\delta > 0$ mit $q(x) \geq \delta q_i(x)$ für alle $x \in [a, \infty]$ und alle i . Somit erhält man aus (2.20) für $i \geq i_0$:

$$\begin{aligned}
 \gamma(v_i) \quad ||v-v_i|| &\geq c \cdot \delta \cdot \left| \left| \varepsilon \frac{pq_i - p_i q}{q^2} \right| \right| \\
 &\geq c \cdot \delta \cdot \min_{x \in [a, \infty]} \left| \frac{q_i(x)}{q(x)} \right| \quad ||v-v_i|| \\
 &\geq c \cdot \delta \cdot \varepsilon_0 \cdot ||v-v_i||.
 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(v_i) = 0$.

Satz 6:

Im Fall $m-n < k$ seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 6, im Fall $m-n=k$ diejenigen von Hilfssatz 7 erfüllt. Ist nun v_f die Minimal-
lösung zu f bezüglich v_n^m , dann gibt es eine Konstante $c > 0$,
so daß für alle $g \in C[a, \infty]$

$$||v_f - v_g|| \leq c \cdot ||f - g||$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnen wir mit v_g eine Minimallösung zu g
bezüglich v_n^m .

Beweis:

Es gilt für $f \neq g$:

$$\begin{aligned}
 ||v_f - v_g|| &\leq ||f - v_f|| + ||f - g|| + ||g - v_g|| \\
 &\leq 2 (||f - v_f|| + ||f - g||) \\
 &= 2 ||f - g|| \left(\frac{||f - v_f||}{||f - g||} + 1 \right). \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Nehmen wir an, es gäbe eine Folge $\{g_i\} \subset C[a, \infty]$ mit $g_i \neq f$,

$$||v_f - v_{g_i}|| = c_i ||f - g_i||$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = \infty.$$

Wegen (2.21) ist dann $\lim_{i \rightarrow \infty} ||f - g_i|| = 0$, also auch $\{v_{g_i}\}$ eine Minimalfolge zu f . Dann folgt nach Hilfssatz 6 bzw. Hilfssatz 7:

Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$ mit

$$\begin{aligned} \gamma ||v_f - v_{g_i}|| &\leq ||f - v_{g_i}|| - ||f - v_f|| \\ &\leq ||f - g_i|| + ||g_i - v_{g_i}|| - ||f - v_f|| \\ &\leq ||f - g_i|| + ||g_i - v_f|| - ||f - v_f|| \\ &\leq 2 ||f - g_i||. \end{aligned}$$

Dies steht zu $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = \infty$ im Widerspruch.

Wir sehen also, daß im Fall $m-n < k$ zu den Voraussetzungen von Satz 4, die die Eindeutigkeit der Minimallösung sicherstellen, und der Normalität von f noch weitere Bedingungen erfüllt sein müssen, um die stetige Abhängigkeit der Minimallösung zu garantieren. Falls diese zusätzlichen Bedingungen fehlen, dann braucht der Tschebyscheff-Operator nicht mehr stetig zu sein, wie die folgenden beiden Beispiele zeigen.

Bemerkt sei noch, daß die Aussage von Satz 6 für alle $f \in V_n^m$ ohne weitere Voraussetzungen richtig ist.

Beispiel 4:

Wir approximieren die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 + x & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 5 - x & \text{für } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{für } 5 \leq x \leq \infty \end{cases}$$

mit $s(x) \equiv 1$ bezüglich V_1^0 in $[0, \infty]$. Dann ist $v(x) \equiv 1$ Minimallösung mit Minimalabweichung 1 und einer Alternante $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$. Zu $v_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha x}$ mit $\alpha > 0$ definieren wir die Funktionen f_α dadurch, daß wir $f_\alpha(0) = 1$, $f_\alpha(x_i) = v_\alpha(x_i) + (-1)^i$ für $i = 1, 2, 3$ und $f_\alpha(x) = 0$ für $x \geq 6$ setzen. An den übrigen Stellen definieren wir f_α dadurch, daß wir $(x_i, f_\alpha(x_i))$ durch Strecken mit $(x_{i+1}, f_\alpha(x_{i+1}))$ verbinden ($x_0 = 0, x_4 = 6$ gesetzt).

Dann ist für alle $\alpha > 0$ die Funktion v_α Minimallösung zu f_α , und es gilt:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f_\alpha - f\| = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|v_\alpha - v\| = 1.$$

Beispiel 5:

Wir betrachten mit $s(x) \equiv 1$ die Funktion

$$v(x) = \frac{1}{1+x^{n-2}} \in V_n^0 \quad (n \geq 2)$$

und definieren eine Funktion $f \in C[0, \infty]$ so:

Wir setzen für $i = 0, 1, \dots, n$

$$f(i) = v(i) + (-1)^{n+i}$$

und $f(x) = 0$ für $x \geq n+1$. Für die restlichen Punkte bestimmen wir $f(x)$ derart, daß f stetig ist und $||f-v|| = 1$ ist. Dann ist v Minimallösung zu f bezüglich V_n^0 . Betrachten wir

$$v_\alpha(x) = \frac{1}{1 + x^{n-2} + \frac{4}{\alpha^2} x^{n-1}(x-\alpha)},$$

so gilt für $\alpha > 0$:

$$0 \leq v_\alpha(x) \leq 1 \quad \text{für } x \in [0, \infty],$$

$$v_\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1.$$

Also gilt $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} ||v-v_\alpha|| = 1$.

Definieren wir jetzt mit $\beta := (v_\alpha - v)(n+1)$

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) + (v_\alpha - v)(x) & \text{für } 0 \leq x \leq n+1 \\ -\beta x + \beta(n+2) & \text{für } n+1 \leq x \leq n+2 \\ 0 & \text{für } x \geq n+2, \end{cases}$$

so gibt es ein $\alpha_0 > 0$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_0$ der Punkt $\frac{\alpha}{2}$

ein $(-)$ -Punkt von $f_\alpha - v_\alpha$ ist und eine Alternante der Länge $n+2$

in $[0, \infty)$ existiert. Also ist v_α Minimallösung zu f_α . Weiter ist

$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} ||f_\alpha - f|| = 0$, daher ist der Tschebyscheff-Operator

bei f .

3. Rationale Approximation singulärer Funktionen

In diesem Teil befassen wir uns mit der Approximation von Funktionen, die in gewissen Punkten des Intervalls $[a, \infty)$ Singularitäten aufweisen. Die Charakterisierung der Minimallösungen durch Alternanten benötigen wir im nächsten Kapitel, um asymptotische Aussagen für die Minimalabweichung herzuleiten. In dem Intervall $[a, \infty)$ sind L reelle Punkte ($L \geq 1$)

$$x_1 < x_2 < \dots < x_L$$

vorgegeben, denen natürliche Zahlen

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$$

zugeordnet sind. Wir setzen

$$\beta := \sum_{i=1}^L \beta_i,$$

$$w(x) := \prod_{i=1}^L (x-x_i)^{\beta_i}$$

und betrachten eine Funktion g mit den Eigenschaften

$$g \text{ ist um jeden Punkt } x_i \text{ } (1 \leq i \leq L) \text{ in eine Potenzreihe entwickelbar,} \quad (3.1)$$

$$g = w \cdot \hat{g}, \text{ wobei } \hat{g} \text{ über } [a, \infty) \cap \mathbb{R} \text{ stetig, reellwertig und } \neq 0 \text{ ist,} \quad (3.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g(x)} \text{ existiert in } \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Wir wollen jetzt für $n \geq 2\beta$ die Funktion $f = \frac{1}{g}$ bezüglich

$$V_n := \left\{ \frac{1}{q} \mid q \in \Pi_n \right\} \quad (3.4)$$

approximieren, d.h. wir minimieren die Tschebyscheff-Norm

$$\|f - \frac{1}{q}\| := \sup_{x \in [a, \infty]} |f(x) - \frac{1}{q(x)}|$$

bezüglich $q \in \Pi_n$. Dazu bestimmen wir $\tilde{p} \in \Pi_{2\beta-1}$ so, daß

$$\tilde{p}^{(j)}(x_i) = g^{(j)}(x_i) \quad (3.5)$$

für $i = 1, 2, \dots, L$ und $j = 0, 1, \dots, 2\beta_i - 1$ gilt und definieren

$$\tilde{V}_n := \left\{ v = \frac{1}{q} = \frac{1}{\tilde{p} + w^2 p} \mid \begin{array}{l} p \in \Pi_{n-2\beta}, q(x) \neq 0 \text{ für} \\ \text{alle } x \in [a, \infty] \text{ mit } x \neq x_i \end{array} \right\}. \quad (3.6)$$

Wir sehen, daß für $n \geq 3\beta$ die Menge $\tilde{V}_n \neq \emptyset$ ist, da $\frac{1}{\tilde{p} + cw^3}$ für genügend großes $|c|$ ($c \in \mathbb{R}$) in $\tilde{V}_n$ liegt.

Hilfssatz 8:

Die Minimalabweichung zu f bezüglich $\tilde{V}_n$ ist dieselbe wie bezüglich V_n .

Beweis:

Sei dazu $\frac{1}{q} \in V_n$ mit $\|f - \frac{1}{q}\| < \infty$. Wegen $\|f - \frac{1}{q}\| = \|\frac{g-q}{gq}\|$ hat demnach $g - q$ in x_i Nullstellen der Ordnung β_i . Also gilt für $i = 1, 2, \dots, L$ und $j = 0, 1, \dots, \beta_i - 1$:

$$q^{(j)}(x_i) = g^{(j)}(x_i) = 0.$$

Dann muß aber $g - q$ in x_i sogar Nullstellen der Ordnung $2\beta_i$ haben, also liegt $\frac{1}{q}$ in $\tilde{V}_n$.

Satz 7:

Falls $\widetilde{V}_n \neq \emptyset$ ist, so existiert zu f eine Minimallösung bezüglich $\widetilde{V}_n$.

Beweis:

Da $\widetilde{V}_n \neq \emptyset$ ist, ist $\rho_{\widetilde{V}_n}(f) < \infty$.

Sei nun $\{\frac{1}{q_m}\} \subset \widetilde{V}_n$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} ||f - \frac{1}{q_m}|| = \rho_{\widetilde{V}_n}(f)$. Wir wählen ein

endliches Intervall $[\alpha, \alpha+1] \subset [a, \infty]$ so, daß $x_1 \in [\alpha, \alpha+1]$ und

$\min_{x \in [\alpha, \alpha+1]} |f(x)| \geq 1 + \frac{3}{2} \rho_{\widetilde{V}_n}(f)$. Außerdem bestimmen wir

$z_m \in [\alpha, \alpha+1]$ mit

$$q_m(z_m) = ||q_m||_1$$

($||\cdot||_1$ = Tschebyscheff-Norm über $[\alpha, \alpha+1]$).

Dann folgt für genügend großes m :

$$||f - \frac{1}{q_m}|| \leq \frac{5}{4} \rho_{\widetilde{V}_n}(f)$$

oder

$$|f(z_m)| - |\frac{1}{q_m(z_m)}| \leq \frac{5}{4} \rho_{\widetilde{V}_n}(f)$$

und damit

$$|\frac{1}{q_m(z_m)}| \geq \frac{1}{4} \rho_{\widetilde{V}_n}(f) + 1.$$

Daher ist $\{||q_m||_1\}$ eine beschränkte Folge, wir können also o.B.d.A. annehmen, daß ein $q \in \Pi_n$ existiert mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ||q_m - q||_1 = 0.$$

Da jedes q_m die Form $q_m = \tilde{p} + w^2 p_m$ mit $p_m \in \Pi_{n-2\beta}$ hat, gilt

$$q = \tilde{p} + w^2 p \quad \text{mit } p \in \Pi_{n-2\beta}.$$

Es ist klar, daß $q(x) \neq 0$ sein muß für $x \neq x_i$, also ist

$\frac{1}{q} \in \widetilde{V}_n$. Für alle endlichen $x \neq x_i$ gilt:

$$\left| f(x) - \frac{1}{q(x)} \right| \leq \rho_{\widetilde{V}_n}(f).$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch für $+\infty$ bzw. $-\infty$. Setzen wir $g = \tilde{p} = w^2 F$ und $\tilde{p} = w \cdot \hat{p}$, so folgt aus

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{q(x)} \right| = \frac{|F(x) - p(x)|}{|\hat{g}(x)| |\hat{p}(x) + w(x)p(x)|}$$

mit $\hat{g}(x_i) \neq 0$ und $\hat{p}(x_i) \neq 0$ auch

$$\left| \frac{1}{g(x_i)} - \frac{1}{q(x_i)} \right| \leq \rho_{\widetilde{V}_n}(f)$$

für $i = 1, 2, \dots, L$. Also ist $\frac{1}{q}$ Minimallösung zu f bezüglich $\widetilde{V}_n$.

Um zu einem Analogon zu Satz 2 zu gelangen, brauchen wir wieder eine zusätzliche Bedingung:

$$(\widetilde{V}1) \quad \rho_{\widetilde{V}_n}(f) > \begin{cases} |f(\infty)| & \text{für } a > -\infty \\ \max(|f(\infty)|, |f(-\infty)|) & \text{für } a = -\infty. \end{cases}$$

Satz 8:

Ist $\widetilde{V}_n \neq 0$ und $(\widetilde{V}1)$ erfüllt, dann ist v_0 genau dann Minimal-
lösung zu f bezüglich $\widetilde{V}_n$, wenn für alle $v \in \widetilde{V}_n$ die Ungleichung

$$\min_{x \in M(v_0)} (f(x) - v_0(x)) \cdot (v(x) - v_0(x)) \leq 0$$

erfüllt ist.

Der Beweis hierzu wird analog zu Satz 2 geführt.

Aus der Darstellung von $\tilde{V}_n$ und Bedingung (3.2) ersieht man im Falle $a = -\infty$, daß es für gerades β nur sinnvoll ist, bezüglich $\tilde{V}_n$ mit geradem n zu approximieren, analog für ungerades β nur mit ungeradem n . Vereinbaren wir dies stets im Fall $a = -\infty$, so gilt der folgende Alternantensatz.

Satz 9:

Sei $\tilde{V}_n \neq \emptyset$ und $(\tilde{V}1)$ erfüllt.

Dann ist $v_0 = \frac{1}{q_0}$ Minimallösung zu f bezüglich V_n .

- $\Leftrightarrow$ (1) Falls $q_0 \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$, dann existiert in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$ eine Alternante der Länge $n-2\beta+2$ zu $f-v_0$.
- (2) Falls $q_0 \in \Pi_{n-1}$, dann existiert in $[a, \infty] \cap \mathbb{R}$ eine Alternante der Länge $n-2\beta+1$ zu $f-v_0$ und der größte Alternantenpunkt ist ein (+)-Punkt (bzw. (-)-Punkt) von $f-v_0$, falls $f(\infty) > 0$ (bzw. $f(\infty) < 0$) ist.

Den Beweis wollen wir wieder auslassen, da er sich genau wie bei Satz 3 führen läßt. Ebenso ergibt sich

Satz 10:

Ist $\tilde{V}_n \neq \emptyset$ und $(\tilde{V}1)$ erfüllt, dann gibt es genau eine Minimal-
lösung zu f bezüglich $\tilde{V}_n$.

4. Asymptotische Aussagen für die Minimalabweichung
von $\frac{1}{g}$ mit ganzer Funktion g.

Unter $||\cdot||_{[a,b]}$ verstehen wir im folgenden stets die Tschebyscheff-Norm über dem Intervall $[a,b]$.

Bezeichnen wir zu $f \in C[-1,1]$ mit

$$\rho_n(f) := \inf_{p \in \Pi_n} ||f-p||_{[-1,1]}$$

die Minimalabweichung bezüglich Π_n über $[-1,1]$ und zu $s > 1$ mit $\mathcal{E}(s)$ die offene Ellipse der komplexen Ebene mit Brennpunkten in -1 und $+1$ und der Summe s der beiden Halbachsen, so besagt ein klassischer Satz von Bernstein [2]:

Ist f Restriktion einer in $\mathcal{E}(s)$ ($s > 1$) holomorphen Funktion f^* , dann gilt:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\rho_n(f))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{s}. \quad (4.1)$$

Gilt umgekehrt (4.1) mit $s > 1$, so ist f Restriktion einer in $\mathcal{E}(s)$ holomorphen Funktion f^* .

In den letzten Jahren wurde versucht, solche Beziehungen zwischen der Holomorphie und der geometrischen Konvergenz der Minimalabweichungen auch für die Approximation bezüglich rationaler Funktionen über $[0, \infty]$ herzuleiten. Wir bezeichnen mit $\mathcal{R}_{m,n}$ die Menge aller rationalen Funktionen der Form

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$$

mit $p_m \in \Pi_m$ und $q_n \in \Pi_n$.

Mit der asymptotischen Untersuchung der Minimalabweichungen

$$\lambda_{m,n} := \inf_{r_{m,n} \in \pi_{m,n}} \left| \left| \frac{1}{q} - r_{m,n} \right| \right| [0, \infty] \quad (4.2)$$

für ganze Funktionen g begannen Cody, Meinardus und Varga [5].

Sie zeigten für $g(x) = e^x$, daß die Ungleichungen

$$\frac{1}{6} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} \leq 0.43501\dots \quad (4.3)$$

erfüllt sind. Später bewies Schönhage [16], daß sogar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

gilt, indem er die Funktion $e^{\frac{x}{4}}$ nach den Laguerreschen Polynomen über $[0, \infty]$ entwickelt. Newman [12] wies nach, daß man auch bei der Approximation von e^{-x} mit allgemeinen rationalen Funktionen nicht mehr als geometrische Konvergenz erhält, da stets die Ungleichung

$$\lambda_{n,n} > 1280^{-n-1}$$

für alle $n = 1, 2, \dots$ erfüllt ist.

Meinardus und Varga [10] dehnten Ergebnisse der Art (4.3) auf ganze Funktionen von perfekt regulärem Wachstum aus, d.h. auf Funktionen g , für die zwei positive Zahlen ρ und B existieren mit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_g(r)}{r^\rho} = B.$$

Dabei ist $M_q(r) = \max_{|z| \leq r} |g(z)|$ (Valiron [17], S. 45).

Sie zeigten, daß für solche Funktionen, die zusätzlich nur nichtnegative Taylorkoeffizienten haben, gilt:

$$\frac{1}{2^{2+1/\rho}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{1/\rho}}.$$

Meinardus [8] untersuchte schließlich notwendige Bedingungen für die geometrische Konvergenz, d.h. für $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n})^{\frac{1}{n}} < 1$.

Dazu betrachtet er zu gegebenem $r > 0$ und $s > 1$ die abgeschlossene Ellipse $\mathcal{E}(r,s)$ der komplexen Ebene mit Brennpunkten in 0 und r und der Summe rs beider Achsen. Ist g eine ganze Funktion, so definiert er

$$M_g(r,s) := \max_{z \in \mathcal{E}(r,s)} |g(z)|. \quad (4.4)$$

Außerdem heißt eine ganze Funktion g von endlicher Ordnung ρ , wenn

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_g(r)}{\log r} = \rho < \infty$$

ist (Valiron [17], S. 35).

Damit bewies Meinardus den folgenden Satz, den man in dieser etwas allgemeineren Form in [11] findet.

Satz 10:

Sei $g(x)$ eine reelle, stetige Funktion über $[0, \infty)$ mit höchstens endlich vielen Nullstellen in $[0, \infty)$, $\{q_n\}$ eine Folge reeller Polynome mit $q_n \in \Pi_n$ für jedes $n \geq 0$ und q eine reelle Zahl mit

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{1}{q} - \frac{1}{q_n} \right| \right\}_{[0, \infty]}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{q} < 1. \quad (4.5)$$

Dann gibt es eine ganze Funktion $G(z)$ mit $G(x) = g(x)$ für alle $x \geq 0$ und G ist von endlicher Ordnung. Außerdem gibt es für jedes $s > 1$ Konstanten $K = K(s, q) > 0$, $\theta = \theta(s, q) > 0$ und $r_0 = r_0(s, q) > 0$ mit

$$M_g(r, s) \leq K \cdot (||g||_{[0, r]})^\theta \quad \text{für alle } r \geq r_0. \quad (4.6)$$

Schließlich griffen Meinardus, Reddy, Taylor und Varga [11] das Problem auf, hinreichende Kriterien für die geometrische Konvergenz bei ganzen Funktionen von endlicher Ordnung herzuleiten, und bewiesen

Satz 11:

Sei $g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ eine ganze Funktion mit $a_v \geq 0$ für $v \geq 0$ und $a_0 > 0$. Wenn es reelle Zahlen $K > 0$, $s > 1$, $\theta > 0$ und $r_0 > 0$ gibt mit $M_g(r, s) \leq K \cdot (||g||_{[0, r]})^\theta$ für alle $r \geq r_0$, dann gibt es eine Folge von reellen Polynomen $\{q_n\}$ mit $q_n \in \Pi_n$ für $n \geq 0$ und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{1}{g} - \frac{1}{q_n} \right|_{[0, \infty]} \right\}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{s^{\frac{1}{1+\theta}}} < 1. \quad (4.7)$$

Kürzlich bewies Reddy [12], [13] unter stärkeren Voraussetzungen an g Konvergenzaussagen für $\lambda_{0,n}$ ($n \rightarrow \infty$), die über die geometrische Konvergenz hinausgehen.

Unser Ziel ist es dagegen, die Diskrepanz zwischen hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die geometrische Konvergenz, die in den beiden Sätzen 10 und 11 zum Ausdruck kommt, abzubauen.

Kurz gesagt, wir wollen versuchen, von der Nichtnegativität der Taylorkoeffizienten, die in Satz 11 verlangt wird, wegzukommen.

Sei $g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ eine ganze, transzendente Funktion mit reellen Koeffizienten und es gebe eine ganze Zahl $N \geq 0$ mit $a_v \geq 0$ für $v \geq N$ und $a_N > 0$. Also hat g höchstens endlich viele Nullstellen

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_L < \infty$$

in $[0, \infty)$ mit entsprechenden Ordnungen

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L.$$

$L = 0$ ist zugelassen.

Wir setzen $\beta := \sum_{i=1}^L \beta_i$ und nehmen noch o.B.d.A. $N \geq 3\beta$ an.

Betrachten wir die Approximation von $f = \frac{1}{g}$ bezüglich $\tilde{V}_n$ über $[0, \infty]$ wie in Kapitel 3, so gilt

Hilfssatz 8:

Für die Minimallösungen $\frac{1}{q_n}$ zu $f = \frac{1}{g}$ bezüglich $\tilde{V}_n$ gilt für $n \geq N$:
 $q_n \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$.

Beweis:

Nehmen wir an, $\frac{1}{q_n} = \frac{1}{\tilde{p} + w^2 p}$ ($\tilde{p}$ und w wie in § 3) sei Minimallösung zu f bezüglich $\tilde{V}_n$ mit $q_n \in \Pi_{n-1}$. Dann existiert nach Satz 9 eine Alternante der Länge $n-2\beta+1$ zu $f = \frac{1}{q_n}$ und der größte Alternantenpunkt ist ein (+)-Punkt von

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{q_n} = \frac{q_n - g}{g q_n} = \frac{w^2 p - (g - \tilde{p})}{w \hat{g} \hat{q}_n},$$

wobei $g = \widehat{wg}$ und $q_n = \widehat{wq_n}$ ist. Dann hat $q_n - g$ mindestens $n+1$ Nullstellen (einschließlich Vielfachheit) in $[0, \infty)$. Durch Anwendung des Satzes von Rolle sieht man, daß $(q_n - g)^{(n)} = -g^{(n)}$ mindestens 1 Nullstelle in $(0, \infty)$ besitzt. Dies ist aber nur möglich, wenn $-g^{(n)}$ mindestens einen positiven Koeffizienten hat. Also muß $n < N$ sein.

Wir betrachten nun

$$g_r(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \leq r \\ g(r) & \text{für } x \geq r \end{cases} \quad (4.8)$$

Dann gibt es ein $r_1 > 0$, so daß $g(r_1) > 0$ ist und für alle $r \geq r_1$ gilt:

$$\min_{x \geq r} g(x) = g(r) \text{ .}$$

Setzt man $f_r(x) := \frac{1}{g_r(x)}$, so ergibt sich für $r \geq r_1$ bei der Approximation über $[0, \infty]$ bezüglich $\widetilde{V}_n$:

$$\begin{aligned} |\rho_{\widetilde{V}_n}(f) - \rho_{\widetilde{V}_n}(f_r)| &\leq \sup_{x \geq r} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(r)} \right| \\ &= f(r) \end{aligned}$$

oder

$$\rho_{\widetilde{V}_n}(f) \leq f(r) + \rho_{\widetilde{V}_n}(f_r) \text{ .} \quad (4.9)$$

Hilfssatz 9:

Ist $r \geq r_1$, $\rho_{\tilde{V}_n}(f_r) > f(r)$ und $n \geq N$, dann gilt für die Minimalabweichung $\frac{1}{q_n^*}$ zu f_r bezüglich $\tilde{V}_n$: $q_n^* \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$.

Der Beweis ergibt sich wie bei Hilfssatz 8.

Mit Hilfe der Ungleichung (4.9) beweisen wir einen Hilfssatz, dessen Formulierung auf Meinardus [9] zurückgeht und dessen Beweis wesentlich auf der Charakterisierung der Minimallösungen beruht (Satz 9). Dieser Hilfssatz nimmt eine Schlüsselstellung zu Satz 12 ein.

Hilfssatz 10:

Es gibt ein $r^* \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\rho_{\tilde{V}_n}(f) \leq \max(2f(r), f(r) + \rho_n(f, r))$$

für alle $r \geq r^*$ und $n \geq N$. Dabei ist

$$\rho_n(f, r) = \inf_{q_n \in \Pi_n} \left| \left| f - \frac{1}{q_n} \right| \right| [0, r].$$

Beweis:

Wegen (4.9) müssen wir nur für $\rho_{\tilde{V}_n}(f_r) > f(r)$ zeigen, daß $\rho_{\tilde{V}_n}(f_r) \leq \rho_n(f, r)$ für $r \geq r^*$ ist. Nach Hilfssatz 8 ist für $n \geq N$ die Minimallösung $\frac{1}{q_n}$ zu f bezüglich $\tilde{V}_n$ nicht ausgeartet, d.h. $q_n \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$. Es existiert also für $n = N$ eine Alternante der Länge $n-2\beta+2$, deren größten Alternantenpunkt wir η nennen. η ist ein $(-)$ -Punkt von $f - \frac{1}{q_n}$.

Sei nun $r^* \geq \max(n, r_1)$ so gewählt, daß

$$q'_N(x) > 0 \quad \text{ist für } x \geq r^*.$$

Dann gilt für $r \geq r^*$ und $n = N$, falls $\rho_{\tilde{V}_N}(f_r) > f(r)$ ist:

$$\rho_{\tilde{V}_N}(f_r) = \rho_N(f, r), \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{q_n^*} = \frac{1}{q_n} \text{ ist Minimallösung zu } f_r \text{ bezüglich } \tilde{V}_n \quad (4.10a)$$

$$\text{mit } q_n^{*'}(x) > 0 \quad \text{für } x \geq r.$$

Wir fahren nun durch Induktion fort:

Es gelte (4.10) und (4.10a) für n mit $n \geq N$. Da wir

$\rho_{\tilde{V}_{n+1}}(f_r) > f(r)$ voraussetzen, gibt es nach Hilfssatz 9 zur Minimallösung $\frac{1}{q_n^*}$ von f_r bezüglich $\tilde{V}_n$ eine Alternante der Länge $n-2\beta+2$ und der größte Alternantenpunkt ist ein $(-)$ -Punkt von

$$f_r - \frac{1}{q_n^*}.$$

Ist

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2\beta+2}$$

eine solche Alternante, so folgt aus (4.10a), daß

$x_{n-2\beta+2} \leq r$ ist und es gilt mit

$$q_n^* = \hat{p} + w^2 p_n = w(\hat{\hat{p}} + w p_n):$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{n+1}^*} - \frac{1}{q_n^*} &= (f_r - \frac{1}{q_n^*}) - (f_r - \frac{1}{q_{n+1}^*}) \\ &= \frac{p_n - p_{n+1}}{(\hat{\hat{p}} + w p_n)(\hat{\hat{p}} + w p_{n+1})}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\frac{1}{q_{n+1}^*}$ die Minimallösung zu f_r bezüglich $\widehat{V}_{n+1}$.

Da $q_{n+1} \notin \Pi_n$, hat $p_{n+1} - p_n$ an den Stellen x_i abwechselndes Vorzeichen und damit $n-2\beta+1$ Nullstellen ξ_i :

$$0 < \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-2\beta} < r.$$

Wegen $p_{n+1} - p_n \in \Pi_{n-2\beta+1}$ folgt damit

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + A(x-\xi_0)(x-\xi_1) \dots (x-\xi_{n-2\beta}) \quad (4.11)$$

mit $A > 0$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $q_n^*(x) > 0$ für $x \geq r$, also ist auch wegen (4.11) $q_{n+1}^*(x) > 0$ für $x \geq r$. Außerdem folgt damit:

$$\rho_{\widehat{V}_{n+1}}(f_r) = \rho_{n+1}(f, r).$$

Satz 12:

$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ sei eine ganze, transzendente Funktion mit reellen Koeffizienten und $a_N > 0$, $a_v \geq 0$ für $v \geq N$. Gibt es nun reelle Zahlen $s > 1$, $K > 0$, $\theta > 0$ und $r_0 > 0$ mit

$$M_g(r, s) \leq K(|g|_{[0, r]})^\theta \quad \text{für alle } r \geq r_0, \quad (4.12)$$

dann gibt es eine Folge von reellen Polynomen $\{q_n\}$ mit

$q_n \in \Pi_n$ für $n \geq 0$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{1}{g} - \frac{1}{q_n} \right|_{[0, \infty]} \right\}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{s^{\frac{1}{1+\theta}}} < 1.$$

Beweis:

q habe die Nullstellen

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_L < \infty$$

mit Ordnungen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$. Weiter sei $\beta = \sum_{i=1}^L \beta_i$ und wir dürfen $N \geq 3\beta$ annehmen. Nach Hilfssatz 10 gibt es ein $r^* \geq x_L$ mit der Eigenschaft

$$\rho_{\widetilde{V}_n}(f) \leq \max \{2 f(r), f(r) + \rho_n(f, r)\} \quad (4.13)$$

für alle $r \geq r^*$ und $n \geq N$. Wir bestimmen $p \in \Pi_{3\beta-1}$ mit

$$p^{(j)}(x_i) = q^{(j)}(x_i)$$

für $j = 0, 1, \dots, 3\beta_i - 1$ und $i = 1, 2, \dots, L$. Also gilt

$$q - p = w^3 G$$

mit $w(x) = \prod_{i=1}^L (x - x_i)^{\beta_i}$ und einer ganzen Funktion G . Sei nun p_n für $n \geq 3\beta$ die Minimallösung zu G bezüglich $\Pi_{n-3\beta}$ über $[0, r]$ mit $r \geq r^*$:

$$\|G - p_n\|_{[0, r]} = E_{n-3\beta}.$$

Wir setzen

$$q_n = p + w^3(p_n + E_{n-3\beta}),$$

wofür wir auch die Darstellungen

$$q_n = w(Q_n + w^2 E_{n-3\beta}) = w \hat{q}_n$$

benutzen und werden zeigen, daß diese Polynome q_n gerade die geometrische Konvergenz liefern. Da $g(x) = w(x)\hat{q}(x)$ ist mit $\hat{g}(x) > 0$ für $x \in [0, \infty]$, folgern wir:

$$\begin{aligned} |\hat{g}(x) - Q_n(x)| &= \left| \frac{1}{w(x)} (g(x) - p(x) - w^3(x)p_n(x)) \right| \\ &= |w^2(x) (C(x) - p_n(x))| \\ &\leq w^2(x) E_{n-3\beta} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \hat{q}_n(x) &= |Q_n(x) + w^2(x)E_{n-3\beta}| \\ &\geq \hat{g}(x) + w^2(x)E_{n-3\beta} - |\hat{g}(x) - Q_n(x)| \\ &\geq \hat{g}(x) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq x \leq r$.

Damit erhalten wir für $0 \leq x \leq r$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{q_n(x)} \right| &= \frac{|g(x) - q_n(x)|}{w^2(x)\hat{g}(x)\hat{q}_n(x)} \\ &\leq \frac{|w(x)| |C(x) - p_n(x) - E_{n-3\beta}|}{[\hat{g}(x)]^2} \\ &\leq K_1 E_{n-3\beta} \end{aligned}$$

$$\text{mit } K_1 = 2 \cdot \max_{x \geq 0} \frac{|w(x)|}{[\hat{g}(x)]^2}.$$

Nach dem Satz von Bernstein ([2], S. 112) gilt nun für

$$0 \leq x \leq r:$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{q_n(x)} \right| \leq 2 K_1 \frac{M_G(r,s)}{(s-1)s^{n-3\beta}}.$$

Aus der Darstellung $G = \frac{g-D}{w^3}$ erkennt man, daß ein $r_1 > 0$ existiert mit der Eigenschaft

$$M_G(r,s) \leq 2 M_q(r,s)$$

für alle $r \geq r_1$. Also gilt in $0 \leq x \leq r$:

$$\rho_n(f,r) \leq \frac{4 s^{3\beta} K \cdot K_1}{(s-1)} \cdot \frac{(||g||_{[0,r]})^\theta}{s^n}.$$

Außerdem wählen wir $r_2 > 0$ so, daß $||g||_{[0,r]} = g(r)$ ist für $r \geq r_2$.

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ ist, existiert ein $n_1 > N$, so daß es zu jedem $n \geq n_1$ eine Zahl $r(n) \geq \max(r_1, r_2, r^*)$ gibt mit

$$g(r(n)) = ||g||_{[0,r(n)]} = s^{\frac{n}{1+\theta}}.$$

Somit gilt für $n \geq n_1$ und $r(n)$

$$\rho_n(f, r(n)) \leq \frac{4 s^{3\beta} K \cdot K_1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{s^{\frac{n}{1+\theta}}}.$$

Wegen (4.13) ergibt sich schließlich für $n \geq n_1$:

$$\rho_{\tilde{V}_n}(f) \leq C \frac{1}{s^{\frac{n}{1+\theta}}}$$

mit $C = \max(4 s^{3\beta} K \cdot K_1 (s-1)^{-1} + 1, 2)$.

Beispiel 6: $g(x) = e^{2x} + ae^x \cos x$ mit $a \in \mathbb{R}$

Man verifiziert leicht, daß für $x \in [0, \infty)$ und $v = 0,1$

$$|(e^x \cos x)^{(2n-v)}| \leq e^x 2^n$$

für $n = 1, 2, \dots$ gilt. Damit sind wegen

$$(e^{2x} + ae^x \cos x)^{(2n-v)} \geq 2^{2n-v} e^{2x} - |a| 2^n e^x$$

für alle genügend großen n die Koeffizienten der Taylorreihe von g positiv. Da die Wachstumsrelation (4.12) erfüllt ist, ergibt sich aus Satz 12 die geometrische Konvergenz zu q über $[0, \infty]$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel 7: $g(x) = e^{2x} + ae^{-x} \cos x$

Wie im vorigen Beispiel zeigt man mit Satz 12 wieder die geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Im Fall der Approximation über $[-\infty, \infty]$ wurde von Meinardus, Reddy, Taylor, Varga [11] ein Satz 10 entsprechender Satz hergeleitet. Statt der Ellipse $\mathcal{E}(r, s)$ betrachtet man dabei die abgeschlossene Ellipse $\hat{\mathcal{E}}(r, s)$ mit Brennpunkten in r und $-r$ und $r \cdot s$ als Summe beider Halbachsen. Außerdem definiert man für ganzes g

$$\hat{M}_g(r, s) = \max_{z \in \hat{\mathcal{E}}(r, s)} |g(z)|. \quad (4.14)$$

Umgekehrt gibt es auch in diesem Fall ein hinreichendes Kriterium für die geometrische Konvergenz, nämlich

Satz 13:

Sei $g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ eine ganze, transzendente Funktion mit reellen Koeffizienten und $a_N > 0$, $a_v \geq 0$ für $v \geq N$. Außerdem sei g gerade oder ungerade. Gibt es nun reelle Zahlen $s > 1$, $K > 0$, $\theta > 0$ und $r_0 > 0$ mit

$$\hat{M}_g(r, s) \leq K(|g|[-r, r])^\theta \quad (4.15)$$

für alle $r \geq r_0$, dann gibt es eine Folge von reellen Polynomen $\{q_n\}$ mit $q_n \in \Pi_n$ für $n \geq 0$ und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{1}{g} - \frac{1}{q_n} \right| [-\infty, \infty] \right\}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{s^{\frac{1}{1+\theta}}} < 1.$$

Zum Beweis dieses Satzes bemerken wir nur folgendes:

Die Minimallösung zu $\frac{1}{g}$ bezüglich V_n ist gerade bzw. ungerade (für alle genügend großen n). Durch die Transformation $\xi = z^2$ kann man für gerades g die Behauptung auf Satz 12 zurückführen. Für ungerades g führt man den Beweis wie bei Satz 12, indem man die Definition von g_r entsprechend modifiziert und die Hilfssätze 8 - 10 überträgt.

Beispiel 8: $g(x) = e^x + c e^{-x}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$

Wir unterscheiden

(1) $c > 0$:

Setzen wir $x_0 := \frac{1}{2} \ln c$, so gilt mit $y = x - x_0$

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x + e^{2x_0} e^{-x} = e^{y+x_0} + e^{-y+x_0} \\ &= e^{x_0} (e^y + e^{-y}) . \end{aligned}$$

Nun ist $e^{x_0} (e^y + e^{-y})$ eine gerade, ganze Funktion bezüglich y mit nichtnegativen Koeffizienten, für die die Wachstumsrelation (4.15) erfüllt ist. Also besitzt $e^{x_0} (e^y + e^{-y})$ und damit $g(x)$ geometrische Konvergenz über $[-\infty, \infty]$.

(2) $c < 0$:

Wir setzen $x_0 := \frac{1}{2} \ln |c|$ und erhalten mit $y = x - x_0$

$$g(x) = e^x - e^{2x_0} e^{-x} = e^{x_0} (e^y - e^{-y}) .$$

$e^{x_0} (e^y - e^{-y})$ ist eine ganze, ungerade Funktion bezüglich y mit nichtnegativen Koeffizienten, außerdem ist wieder (4.15) erfüllt. Also besitzt $g(x)$ wieder geometrische Konvergenz über $[-\infty, \infty]$.

Roulier und Taylor [15] zeigten für dieses Beispiel die geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ mit Hilfe eines Störungssatzes.

5. Vergleichs- und Störungssätze zur geometrischen Konvergenz der Minimalabweichung

Obwohl durch Satz 12 und Satz 13 die Diskrepanz zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die geometrische Konvergenz etwas gemildert wird, bleibt die Lücke beträchtlich. Wir wollen hier zeigen, daß für die Summe und das Produkt von Funktionen mit geometrischer Konvergenz unter gewissen Bedingungen wieder geometrische Konvergenz vorliegt. Außerdem beweisen wir in einem Störungssatz, daß eine Funktion, die nicht zu sehr von einer Funktion mit geometrischer Konvergenz abweicht, ebenfalls geometrische Konvergenz besitzt.

Zur Vereinfachung vereinbaren wir folgendes:

Sei

$$0 \leq x_1 \leq x_2 < \dots < x_L < \infty$$

mit zugeordneten ganzen, nichtnegativen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$.

Wir setzen

$$s := \sum_{i=1}^L \beta_i \quad \text{und} \quad w(x) := \prod_{i=1}^L (x - x_i)^{\beta_i}$$

Weiter sei

$$N := \left\{ h(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \mid \begin{array}{l} h \text{ ganz, } a_v \in \mathbb{R}, h \text{ hat in } [0, \infty) \\ \text{genau bei } x_i \text{ Nullstellen der Ord-} \\ \text{nung } \beta_i \ (1 \leq i \leq L), \lim_{i \rightarrow \infty} h(x) = \infty \end{array} \right\},$$

$$\tilde{N} := \left\{ h(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \mid \begin{array}{l} h \text{ ganz, } h \neq 0, a_v \in \mathbb{R}, h \text{ hat} \\ \text{bei } x_1 \text{ Nullstellen der Ord-} \\ \text{nung } \geq \beta_1 \text{ (} 1 \leq i \leq L \text{)} \end{array} \right\}.$$

Ist $h \in \tilde{N}$, so bezeichnen wir mit $\hat{h}$ die ganze Funktion $\hat{h} = \frac{h}{w}$.

Hilfssatz 11:

Ist $h \in N$, $h_1 \in \tilde{N}$, $r > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$ und $|h(x)| \geq \tilde{\gamma}|h_1(x)|$ für $x \geq r$, dann gibt es eine Konstante $\gamma > 0$ mit

$$|h(x)| \geq \gamma|h_1(x)| \text{ für alle } x \in [0, \infty).$$

Beweis:

Da $h \in N$, ist $\hat{h}(x) > 0$ in $[0, r]$. Also ist

$$\gamma_1 := \min_{x \in [0, r]} \hat{h}(x) > 0.$$

Setzen wir

$$\gamma_2 := \max_{x \in [0, r]} |\hat{h}_1(x)|, \text{ so gilt für } x \in [0, r]:$$

$$\left| \frac{h(x)}{h_1(x)} \right| \geq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Hilfssatz 12:

Seien $g \in N$, $g_1 \in \tilde{N}$, $r > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$, $\{q_n\}$ eine Folge in N und $\{q_{1,n}\}$ eine Folge in $\tilde{N}$ mit $|q_n(x)| \geq \tilde{\gamma}|q_{1,n}(x)|$ für alle $x \geq r$ und alle n . Außerdem sei $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g} - \hat{q}_n\|_{[0, r]} = 0$ und

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_1 - \hat{q}_{1,n}\|_{[0, r]} = 0$. Dann gibt es eine Konstante $\gamma > 0$

mit $|q_n(x)| \geq \gamma|q_{1,n}(x)|$ für alle $x \in [0, \infty)$ und alle n .

Beweis:

Wir setzen

$$\alpha_1 := \min_{x \in [0, r]} \hat{g}(x) \quad , \quad \alpha_2 := \max_{x \in [0, r]} |\hat{g}_1(x)| \quad .$$

Dann ist $\alpha_1 > 0$, und wir können ein n_0 so wählen, daß

$$\hat{q}_n(x) \geq \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{und} \quad |\hat{q}_{1,n}(x)| \leq \frac{\alpha_2}{2}$$

für alle $n > n_0$ und alle $x \in [0, r]$ gilt.

Damit ergibt sich für alle $x \in [0, \infty)$ und $n > n_0$:

$$\left| \frac{q_n(x)}{q_{1,n}(x)} \right| \geq \max(\tilde{\gamma}, \alpha_1 \alpha_2^{-1}) \quad .$$

Nach Hilfssatz 11 gibt es außerdem positive Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \dots,$

γ_{n_0} mit $|q_n(x)| \geq \gamma_n |q_{1,n}(x)|$ für $x \in [0, \infty)$ und $n = 1, 2, \dots, n_0$.

Die Zahl $\gamma = \min(\tilde{\gamma}, \alpha_1 \alpha_2^{-1}, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_0})$ erfüllt somit unsere Behauptung.

Satz 14:

Es seien $g_1, g_2 \in \tilde{N}$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} g_i(x) = \infty$ ($i = 1, 2$), $g = g_1 + g_2 \in N$.

Wenn jetzt g_1 und g_2 geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ besitzen, so gilt dies auch für g .

Beweis:

Sei η eine feste positive Zahl, die größer als alle reellen Nullstellen von g_1 und g_2 ist. Mit $\frac{1}{q_{i,n}}$ bezeichnen wir die

Minimallösung zu $\frac{1}{g_i}$ bezüglich V_n ($i = 1, 2$ und V_n wie in

Kapitel 3) und setzen

$$q_n = q_{1,n} + q_{2,n} \quad .$$

Auf Grund der geometrischen Konvergenz von g_1 und g_2 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_i - q_{i,n}\|_{[0,n]} = 0$$

für $i = 1, 2$. Damit ist aber auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - q_n\|_{[0,n]} = 0.$$

Nach Hilfssatz 11 gibt es ein $\gamma > 0$ mit $|g(x)| \geq \gamma |g_1(x)|$ für $x \in [0, \infty)$ und $i = 1, 2$, außerdem nach Hilfssatz 12 ein $\bar{\gamma} > 0$ mit $|q_n(x)| \geq \bar{\gamma} |q_{1,n}(x)|$ für alle $x \in [0, \infty)$ und alle n .

Nun gibt es Konstanten $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ und $s_1 > 1$, $s_2 > 1$ mit

$$\left\| \frac{1}{g_i} - \frac{1}{q_{i,n}} \right\|_{[0,\infty]} \leq K_i s_i^{-n} \quad (n \text{ genügend groß}) \quad (5.1)$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{q_n} \right\|_{[0,\infty]} &\leq \left\| \frac{g_1 - q_{1,n}}{g q_n} \right\|_{[0,\infty]} + \left\| \frac{g_2 - q_{2,n}}{g q_n} \right\|_{[0,\infty]} \\ &\leq \frac{1}{\gamma \bar{\gamma}} \left| \frac{K_1}{s_1^n} + \frac{K_2}{s_2^n} \right|, \end{aligned}$$

somit besitzt g geometrische Konvergenz.

Satz 15:

Es seien $g_1, g_2 \in N$ mit $\beta = 0$, g_1 und g_2 haben geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$. Dann besitzt auch $g = g_1 \cdot g_2$ geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$.

Beweis:

Mit $\frac{1}{q_{i,n}}$ bezeichnen wir wieder die Minimallösung zu $\frac{1}{g_i}$

bezüglich V_n^0 ($i = 1, 2$), $q_n := q_{1,n} \cdot q_{2,n}$.

Mit den Bezeichnungen wie unter (5.1) gilt dann:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{q_n(x)} \right| &= \left| \frac{(g_1 \cdot g_2)(x) - (q_{1,n} \cdot q_{2,n})(x)}{(g_1 \cdot g_2 \cdot q_{1,n} \cdot q_{2,n})(x)} \right| \\ &\leq \frac{q_{2,n}(x) |g_1(x) - q_{1,n}(x)| + q_{1,n}(x) |g_2(x) - q_{2,n}(x)|}{(g_1 \cdot g_2 \cdot q_{1,n} \cdot q_{2,n})(x)} \\ &\quad + \frac{|g_1(x) - q_{1,n}(x)| |g_2(x) - q_{2,n}(x)|}{(g_1 \cdot g_2 \cdot q_{1,n} \cdot q_{2,n})(x)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{g_2} \right\| [0, \infty] \frac{K_1}{s_1} n + \left\| \frac{1}{g_1} \right\| [0, \infty] \frac{K_2}{s_2} n + \frac{K_1 K_2}{s_1 s_2} n, \end{aligned}$$

also hat das Produkt geometrische Konvergenz.

Die Nützlichkeit der letzten beiden Sätze ergibt sich erst in Verbindung mit Störungssätzen, da in diesen geometrische Konvergenz für Funktionen bewiesen wird, deren Taylorkoeffizienten nicht fast alle ≥ 0 sind.

Roulier und Taylor bewiesen

Satz 16 [15]:

Sei $g \in N$ und es gebe Zahlen $s > 1$, $K > 0$, $\theta > 0$ und $r_0 > 0$ mit

$$M_g(r, s) \leq K \cdot (\|g\| [0, r])^\theta \quad \text{für alle } r \geq r_0.$$

Außerdem gebe es ganze Funktionen g_1 und g_2 mit den Eigen-

schaften:

$$g = g_1 + g_2, \quad (5.2)$$

$$g_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \text{ mit } a_v \geq 0 \text{ für } v = 0, 1, 2, \dots, \text{ und } g_1 \quad (5.3)$$

habe geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ und sei kein Polynom,

$$\text{es existiert ein } B > 0 \text{ mit } g_2(x) \geq -B \text{ für alle } x \geq 0, \quad (5.4)$$

$$\text{es existieren Zahlen } r_1 > 0, \psi > 0 \text{ und } A > 0 \text{ mit} \quad (5.5)$$

$$g_2(x) \leq A[g_1(x)]^\psi \text{ für alle } x \geq r_1,$$

$$\text{es gibt eine Folge von positiven Zahlen } \{n_j\}, \text{ für die} \quad (5.6)$$

mit einer festen Zahl ρ

$$0 < n_{j+1} - n_j \leq \rho$$

$$\text{gilt und außerdem } g_2^{(n_j+1)}(x) \leq 0 \text{ für alle } x \geq 0$$

$$\text{und } j = 1, 2, \dots$$

Dann besitzt g geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$.

Bemerkung:

Satz 12 kann man auch beweisen, indem man den Satz von Roulier und Taylor anwendet. Zerlegen wir nämlich $g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ mit den Bezeichnungen von Satz 12 in $g = g_1 + g_2$, wobei wir

$$g_1(z) = 1 + \sum_{v=N+1}^{\infty} a_v z^v$$

setzen, so gilt für alle genügend großen r :

$$\begin{aligned} M_{g_1}(r, s) &\leq M_g(r, s) + M_{g_2}(r, s) \\ &\leq 2M_g(r, s) \leq 2K(\|g\|_{[0, r]})^\theta \\ &\leq 4K(\|g_1\|_{[0, r]})^\theta. \end{aligned}$$

Satz 11 liefert dann die geometrische Konvergenz zu g_1 und aus Satz 16 folgt somit die geometrische Konvergenz zu g .

Obwohl die Sätze 11 und 16 daher Satz 12 implizieren, erscheint es uns sinnvoll, die Beweismethode des vorigen Kapitels einzuschlagen: Einmal ist der Beweis von Satz 16 [15] recht langwierig, zum andern wird sich zeigen, daß Satz 17 in Verbindung mit Satz 12 eine Verallgemeinerung des Satzes von Roulier und Taylor darstellt.

Ein Nachteil des Satzes 16 besteht darin, daß man ihn wegen Voraussetzung (5.3) nicht mehrmals hintereinander anwenden kann. Dieser Mangel wird im folgenden Satz vermieden.

Satz 17:

Sei $g \in N$ und transzendent. Es gebe für jedes $s > 1$ Konstanten $K(s) > 0$, $\theta(s) > 0$ und $r(s) > 0$ mit

$$M_g(r, s) \leq K(s) \cdot (||g||_{[0, r]})^{\theta(s)} \quad \text{für alle } r \geq r(s).$$

Außerdem gebe es ganze Funktionen $g_1, g_2 \in \tilde{N}$ mit den Eigenschaften (5.2), (5.4)-(5.6). Weiter gelte:

g_1 hat geometrische Konvergenz in $[0, \infty]$ und es gibt ein (5.3a)

$r_0 > 0$, so daß g_1 für $x \geq r_0$ monoton wächst.

Dann besitzt g geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$.

Zum Beweis benötigen wir noch

Hilfssatz 13:

Sei h eine ganze, transzendente Funktion, p ein Polynom, $s > 1$. Dann gibt es ein $r^* > 0$, so daß für alle $r \geq r^*$ die Ungleichung

$$M_p(r, s) \leq M_h(r, s)$$

erfüllt ist.

Beweis:

Da p ein Polynom ist, gibt es ein $r_0 > 0$, ein $\gamma > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|p(z)| \leq \gamma |z|^n \quad \text{für alle } |z| \geq r_0.$$

Sei nun $p_1(z) := \gamma z^n$, und wir nehmen an, es gäbe eine Folge

$\{r_k\} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ und

$$M_h(r, s) < M_{p_1}(r, s) = \gamma \left[\frac{r}{2} + \frac{r}{4} \left(s + \frac{1}{s} \right) \right]^n$$

Dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel für $h(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$:

$$\begin{aligned} |a_v| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\xi(r_k, s)} \frac{h(\xi)}{\xi^{v+1}} d\xi \right| \\ &\leq \frac{\frac{r_k}{4} \left(s + \frac{1}{s} \right) \gamma \left(\frac{r_k}{4} \right)^n \left(2 + s + \frac{1}{s} \right)^n}{\left[\frac{r_k}{4} \left(s + \frac{1}{s} \right) - \frac{r_k}{2} \right]^{v+1}} \\ &= \text{const.} \cdot \left(\frac{r_k}{4} \right)^{n-v}. \end{aligned}$$

Also gilt, da $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ ist:

$$|a_v| = 0 \quad \text{für } v = n+1, n+2, \dots$$

Dies ist ein Widerspruch zur Transzendenz von h , also gibt es

ein $r^* > 0$ mit

$$M_h(r,s) \geq M_{p_1}(r,s) \geq M_p(r,s) \quad \text{für alle } r \geq r^*.$$

Beweis zu Satz 17:

g_1 hat endlich viele Nullstellen, die wir mit

$$0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_d < \infty$$

bezeichnen und entsprechenden Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$. Unter

diesen y_i kommen wegen $g_1 \in \tilde{N}$ die Stellen x_i mit der Ordnung $\geq \beta_i$ vor. Wir definieren

$$w_1(x) := \prod_{i=1}^d (x - y_i)^{\alpha_i} \quad \text{und} \quad \alpha := \sum_{i=1}^d \alpha_i. \quad (5.7)$$

Mit $\tilde{p}_1$ bezeichnen wir das Polynom aus $\pi_{2\alpha-1}$ mit

$$\tilde{p}_1^{(j)}(y_i) = g_1^{(j)}(y_i)$$

für $j = 0, 1, \dots, 2\alpha_i - 1$ und $i = 1, 2, \dots, d$; außerdem sei

$$\frac{1}{q_{1,n}} = \frac{1}{\tilde{p}_1 + w_1^2 p_{1,n}}$$

die Minimallösung zu $\frac{1}{q_1}$ bezüglich V_n über $[0, \infty]$. Eine solche

existiert in jedem Fall für $n \geq 3\alpha$ und wir definieren

$$\left\| \frac{1}{g_1} - \frac{1}{q_{1,n}} \right\|_{[0, \infty]} = E_{1,n}.$$

Weiter bestimmen wir $\tilde{p}_2 \in \pi_{3\beta-1}$ durch

$$\tilde{p}_2^{(j)}(x_i) = g_2^{(j)}(x_i)$$

für $j = 0, 1, \dots, 3\beta_i - 1$ und $i = 1, 2, \dots, L$. Dann gilt

$$g_2 - \tilde{p}_2 = w^3 G_2$$

mit einer ganzen Funktion G_2 .

Mit $p_{2,n} \in \Pi_{n-3\beta}$ bezeichnen wir für $n \geq 3\beta$ das Minimalpolynom zu G_2 über $[0, r]$ und setzen

$$||G_2 - p_{2,n}||_{[0,r]} = E_{2,n}(r) .$$

Wir betrachten jetzt

$$q_n = q_{1,n} + q_{2,n} \quad (5.8)$$

mit

$$q_{2,n} = \tilde{p}_2 + w^3(p_{2,n} + E_{2,n}(r)) \quad (5.9)$$

und wollen zeigen, daß wir mit den Polynomen $q_n \in \Pi_n$ die geometrische Konvergenz erreichen.

Für $x > y_d$ gilt

$$\frac{1}{q_{1,n}(x)} \leq \frac{1}{g_1(x)} + E_{1,n} ,$$

also gibt es, da $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{1,n} = 0$ ist, und g_1 für $x \geq r_0$ monoton wächst, ein $n^* \in \mathbb{N}$ und ein $r_2 > \max(r_0, y_d)$ mit

$$\frac{B}{q_{1,n}(x)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } x \geq r_2 \text{ und } n \geq n^* \quad (B \text{ wie in (5.4)}) . \quad (5.10)$$

Dieses r_2 können wir noch so wählen, daß zusätzlich

$$g(x) \geq \frac{1}{2} g_1(x) \quad \text{für alle } x \geq r_2 \text{ erfüllt ist.} \quad (5.11)$$

Im folgenden sei stets $r \geq r_2$. Da $q_n \in \tilde{N}$ ist, gilt $q_n = w \cdot \hat{q}_n$.

Wir definieren ein Polynom Q_n durch

$$q_n = w(Q_n + w^2 E_{2,n}(r))$$

und erhalten für $x \in [0, r_2]$ und $n \geq 3\alpha$:

$$\begin{aligned} |\hat{g}(x) - Q_n(x)| &= \left| \frac{1}{w(x)} (g_1(x) + g_2(x) - q_{1,n}(x) - p_2(x) - w^3(x) p_{2,n}(x)) \right| \\ &\leq \left| \frac{g_1(x) - q_{1,n}(x)}{w(x) \hat{g}_1(x) q_{1,n}(x)} \right| \left| \hat{g}_1(x) q_{1,n}(x) \right| \\ &\quad + \left| \frac{g_2(x) - p_2(x) - w^3(x) p_{2,n}(x)}{w^3(x)} \right| w^2(x) \end{aligned}$$

$$\leq K_1 E_{1,n} + w^2(x) E_{2,n}(r) .$$

Dabei ist K_1 eine Konstante, die sich aus der Beschränktheit von $||q_{1,n}||$ $[0, r_2]$ für $n \geq 3\alpha$ ergibt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \hat{q}_n(x) &= Q_n(x) + w^2(x) E_{2,n}(r) \\ &\geq \hat{g}(x) - |\hat{g}(x) - Q_n(x)| + w^2(x) E_{2,n}(r) \\ &\geq \hat{g}(x) - K_1 E_{1,n} . \end{aligned}$$

Also gibt es ein $n^{**} \in \mathbb{N}$ mit

$$\hat{q}_n(x) \geq \frac{1}{2} \hat{g}(x) \quad \text{für alle } x \in [0, r_2] \text{ und alle } n \geq n^{**} . \quad (5.12)$$

Jetzt ist aber $\tilde{p}_2 + w^3 p_{2,n}$ Hermite-Interpolationspolynom zu g_2 auf einer gewissen Punktmenge in $[0, r]$. Also folgt aus (5.6) für $x \geq r$ und $n = n_j$:

$$g_2(x) \leq \tilde{p}_2(x) + w^3(x) p_{2,n}(x) \leq q_{2,n}(x) .$$

Wählen wir j_0 so, daß $n_{j_0} \geq \max(n^*, n^{**})$, dann gilt mit (5.10)

$$\begin{aligned} q_n(x) &= q_{1,n}(x) \left(1 + \frac{q_{2,n}(x)}{q_{1,n}(x)}\right) \geq q_{1,n}(x) \left(1 - \frac{B}{q_{1,n}(x)}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} q_{1,n}(x) \end{aligned} \quad (5.13)$$

für $n = n_j$ mit $j \geq j_0$ und $x \geq r$ mit $r \geq r_2$.

Für $x \in [r_2, r]$ ist wegen $q_{2,n}(x) \geq -B$ und (5.10) ebenfalls

$$q_n(x) \geq \frac{1}{2} q_{1,n}(x) \quad \text{für alle } n \geq n^* . \quad (5.14)$$

Aus (5.12)-(5.14) ergibt sich, daß $q_n \in N$ für $n = n_j$ mit $j \geq j_0$.

Insbesondere gilt für $x \in [r, \infty]$ mit $r \geq r_2$ und $n = n_j$

mit $j \geq j_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{q_n(x)} \right| &\leq \frac{1}{g(x)} + \frac{1}{q_n(x)} \leq \frac{2}{g_1(r)} + \frac{2}{q_{1,n}(x)} \\ &\leq \frac{4}{g_1(r)} + 2E_{1,n} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Wir kommen nun zur Abschätzung in $[0, r]$ und gehen aus von

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{q_n(x)} \right| \leq \left| \frac{g_1(x) - q_{1,n}(x)}{g(x)q_n(x)} \right| + \left| \frac{g_2(x) - q_{2,n}(x)}{g(x)q_n(x)} \right| \quad (5.16)$$

Wegen (5.11) gibt es nach Hilfssatz 11 ein $\gamma > 0$ mit

$|g(x)| \geq \gamma |g_1(x)|$ für alle $x \in [0, \infty)$. Nun gibt es eine Konstante $K > 0$ mit

$$||q_{1,n}||_{[0, r_2]} \leq K \quad \text{für alle } n \geq 3a.$$

Also folgt aus

$$|\hat{q}_{1,n}(x) - \hat{g}_1(x)| \leq E_{1,n} |\hat{g}_1(x) q_{1,n}(x)|,$$

daß $\lim_{n \rightarrow \infty} ||\hat{q}_{1,n} - \hat{g}_1||_{[0, r_2]} = 0$ ist. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} ||\hat{g}_2 - \hat{q}_{2,n}||_{[0, r_2]} &= ||w^2 G_2 - w^2(p_{2,n} + E_{2,n}(r))||_{[0, r_2]} \\ &\leq ||w^2||_{[0, r_2]} \cdot 2E_{2,n}(r) \end{aligned}$$

für $r \geq r_2$. Unter der Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{2,n}(r) = 0$ folgt

damit $\lim_{n \rightarrow \infty} ||\hat{g} - \hat{q}_n||_{[0, r_2]} = 0$ und so nach Hilfssatz 12 unter

Beachtung von (5.13) und (5.14):

Es gibt eine Konstante $\bar{\gamma} > 0$ mit

$$|q_n(x)| \geq \bar{\gamma} |q_{1,n}(x)|$$

für alle $x \in [0, \infty)$, wenn nur noch $n = n_j$ ($j \geq j_0$) und $r \geq r_2$ ist.

Somit gilt unter diesen Einschränkungen

$$\left| \frac{g_1(x) - q_{1,n}(x)}{g(x)q_n(x)} \right| \leq \frac{1}{\gamma \bar{\gamma}} E_{1,n} \quad \text{für } x \in [0, r] \quad (5.17)$$

und für $x \in [r_2, r]$

$$\begin{aligned} \left| \frac{g_2(x) - g_{2,n}(x)}{g(x) g_n(x)} \right| &= \left| \frac{w^3(x) (G_2(x) - p_{2,n}(x) - E_{2,n}(r))}{g(x) g_n(x)} \right| \\ &\leq \frac{2 E_{2,n}(r)}{\tilde{\gamma}} \left| \frac{w^3(x)}{g(x)} \right| \left| \frac{1}{g_{1,n}(x)} \right| \\ &\leq \frac{2 E_{2,n}(r)}{\tilde{\gamma}} \left| \frac{w^3(x)}{g(x)} \right| \left[\frac{1}{g_1(x)} + E_{1,n} \right]. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Da g_1 geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ besitzt, gibt es zu $s > 1$ Konstanten $\tilde{K} > 0$, $\tilde{r} \geq r_2$ und eine ganze Zahl $\tilde{\theta} > 1$ mit

$$M_{g_1}(x, s) \leq \tilde{K} (||g_1||_{[0, x]})^{\tilde{\theta}} \quad \text{für alle } x \geq \tilde{r}.$$

Außerdem wählen wir $\tilde{r}$ so, daß $|g_1(x)| = ||g_1||_{[0, x]}$ gilt für alle $x \geq \tilde{r}$. Damit ergibt sich wegen (5.11) für $x \geq \tilde{r}$:

$$\left| \frac{w^3(x)}{g(x)} \right| \leq 2 \left| \frac{w^3(x)}{g_1(x)} \right| = \frac{2 |w^3(x)|}{||g_1||_{[0, x]}}$$

$$\leq 2 \tilde{K}^{\frac{1}{\tilde{\theta}}} \left[\frac{M_{3\tilde{\theta}}(x, s)}{M_{g_1}(x, s)} \right]^{\frac{1}{\tilde{\theta}}}$$

Nach Hilfssatz 13 bleibt dann $\left| \frac{w^3(x)}{g(x)} \right|$ für alle genügend großen x beschränkt, also existiert

$$\max_{x \geq 0} \left| \frac{w^3(x)}{g(x)} \right|.$$

Außerdem existiert $\max_{x \geq r_2} \frac{1}{g_1(x)}$, so daß sich aus (5.18) (unter

$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{2,n}(r) = 0$ mit $r \geq r_2$) für $x \in [r_2, r]$ und

$n = n_j$ mit $j \geq j_0$ ergibt:

$$\left| \frac{g_2(x) - q_{2,n}(x)}{g(x) q_n(x)} \right| \leq K_2 E_{2,n}(r) . \quad (5.19)$$

Dabei ist $K_2 > 0$ eine Konstante.

Schließlich gilt wegen (5.12) für $x \in [0, r_2]$ und $n \geq n^{**}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{g_2(x) - q_{2,n}(x)}{g(x) q_n(x)} \right| &\leq \left| \frac{w(x) (G_2(x) - p_{2,n}(x))}{\hat{g}(x) \hat{q}_n(x)} \right| \\ &\quad + \left| \frac{w(x) E_{2,n}(r)}{\hat{g}(x) \hat{q}_n(x)} \right| \\ &\leq 4 \frac{|w(x)|}{|\hat{g}(x)|^2} E_{2,n}(r) \\ &\leq K_3 E_{2,n}(r) \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\text{mit } K_3 := \max_{x \in [0, r_2]} \frac{4 |w(x)|}{|\hat{g}(x)|^2} .$$

Zusammenfassend ergibt sich aus (5.15), (5.17), (5.19), (5.20)

für $n = n_j$ mit $j \geq j_0$, falls noch $r \geq r_2$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{2,n}(r) = 0$ ist:

$$\left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{q_n} \right\|_{[0, \infty]} \leq \max \left\{ \frac{E_{1,n}}{\gamma \tilde{\gamma}} + K_4 E_{2,n}(r), \frac{4}{g_1(r)} + 2E_{1,n} \right\} \quad (5.21)$$

$$(K_4 = \max(K_2, K_3)) .$$

Da g_1 geometrische Konvergenz besitzt, existiert ein $K^* > 0$

und ein $s > 1$ mit

$$E_{1,n} \leq \frac{K^*}{s^n} \quad \text{für alle genügend großen } n .$$

In (5.21) ist $E_{2,n}(r)$ die Minimallabweichung zu $G_2 = \frac{g_2 - \tilde{p}_2}{w^3}$

bezüglich $\pi_{n-3\beta}$ über $[0, r]$, also gilt nach einem Satz von Bernstein [2]

$$E_{2,n}(r) \leq \frac{2 M_{G_2}(r, s)}{(s-1)s^{n-3\beta}} \quad (5.22)$$

Nun folgt aber mit Hilfssatz 13 für alle genügend großen r :

$$\begin{aligned} M_{G_2}(r, s) &\leq M_{g_2}(r, s) + M_{\tilde{P}_2}(r, s) \\ &\leq M_{g_2}(r, s) + M_{g_1}(r, s) \\ &\leq 2 M_{g_1}(r, s) + M_g(r, s) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nach Satz 10 gibt es Zahlen $K_5 > 0$, $\theta_1 > 0$ und $r_3 > 0$ mit

$$M_{g_1}(r, s) \leq K_5 (||g_1||_{[0, r]})^{\theta_1} \quad \text{für } r \geq r_3. \quad (5.24)$$

Nach Voraussetzung (5.3a) und (5.5) gibt es eine Zahl

$r_4 > 0$ mit

$$\begin{aligned} ||g||_{[0, r]} &\leq ||g_1||_{[0, r]} + ||g_2||_{[0, r]} \\ &\leq ||g_1||_{[0, r]} + A(||g_1||_{[0, r]})^\psi \\ &\leq (1+A)(||g_1||_{[0, r]})^{\phi_1} \end{aligned}$$

für $r \geq r_4$. Dabei ist $\phi_1 := \max(1, \psi)$.

Außerdem gibt es Zahlen $K_6 > 0$, $\theta > 0$ mit

$$M_g(r, s) \leq K_6 (||g||_{[0, r]})^\theta$$

für alle genügend großen r . Wir können also ohne weiteres

r_4 so groß wählen, daß

$$M_g(r, s) \leq K_7 (||g_1||_{[0, r]})^{\phi_1 \theta} \quad (5.25)$$

für alle $r \geq r_4$ mit einer Konstanten K_7 erfüllt ist.

Aus (5.22) - (5.25) folgt daher mit einem $K_8 > 0$

$$K_4 E_{2,n}(r) \leq K_8 \frac{(\|g_1\|_{[0,r]})^\phi}{s^n} = K_8 \frac{(g_1(r))^\phi}{s^n} \quad (5.26)$$

für alle genügend großen r . Dabei ist $\phi = \max(\phi_1, \theta_1)$.

Da g_1 für $r \geq r_0$ monoton wächst, können wir $r = r(n)$ so wählen, daß

$$g_1(r) = s^{\frac{n}{\phi+1}}$$

für alle genügend großen n erfüllbar ist. Wegen (5.26) gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{2,n}(r(n)) = 0$$

und aus (5.21) ergibt sich für $n = n_j$ für alle genügend großen j :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{g_n} \right\|_{[0,\infty]} &\leq \max \left\{ \frac{K^*}{\gamma\gamma} s^{-n} + K_8 s^{\frac{n\phi}{\phi+1}-n}, 2K^* s^{-n} + 4s^{\frac{-n}{\phi+1}} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{K^*}{\gamma\gamma} s^{-n} + K_8 s^{\frac{-n}{\phi+1}}, 2K^* s^{-n} + 4s^{\frac{-n}{\phi+1}} \right\} \\ &\leq \text{const. } s^{\frac{-n}{\phi+1}} \end{aligned}$$

Beachtet man jetzt noch, daß wegen (5.6)

$$0 < n_{j+1} - n_j \leq \rho$$

erfüllt ist, so folgt damit die geometrische Konvergenz.

Bemerkung:

Der Satz 16 von Roulier und Taylor ist in Satz 17 als Spezialfall enthalten:

Wir legen die Bezeichnungen von Satz 16 zugrunde und bestimmen das Polynom vom Grad $\leq \beta-1$, das die Funktion g_1 an den Stellen x_i mit der Ordnung β_i interpoliert ($1 \leq i \leq L$). Ist $p \neq 0$, so hat p einen positiven Koeffizienten bei der höchsten Potenz. Wir betrachten

$$g = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$$

mit $\tilde{g}_1 = g_1 - p$ und $\tilde{g}_2 = g_2 + p$.

Dann gibt es für $s > 1$ Konstanten $K_1 > 0$ und $\theta_1 > 1$, so daß für alle genügend großen r

$$\begin{aligned} M_{\tilde{g}_1}(r,s) &\leq M_{g_1}(r,s) + M_p(r,s) \leq 2 M_{g_1}(r,s) \\ &\leq 2 K_1 (||g_1||_{[0,r]})^{\theta_1} \leq 4 K_1 (||\tilde{g}_1||_{[0,r]})^{\theta_1} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Also besitzt $\tilde{g}_1$ über $[0, \infty]$ nach Satz 12 geometrische Konvergenz. Wenden wir Satz 17 auf $g = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$ an, so ergibt sich die geometrische Konvergenz zu g über $[0, \infty]$.

Beispiel 9:

$$g(x) = e^x + a e^{-\lambda_1 x} + b e^{-\lambda_2 x} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

Haben a und b dasselbe Vorzeichen, so folgt die geometrische Konvergenz zu g über $[0, \infty]$ aus dem Satz von Roulier und Taylor bzw. Satz 17.

Im allgemeinen Fall argumentieren wir so:

Wir bezeichnen mit $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_L$ die Nullstellen von g in $[0, \infty)$ mit den entsprechenden Ordnungen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ und bestimmen ein Polynom p , das an den Stellen x_i die Funktion $e^x + a e^{-\lambda_1 x}$ mit der Ordnung β_i interpoliert ($1 \leq i \leq L$) und einen positiven Koeffizienten bei der höchsten Potenz besitzt. Dann ist $g = g_1 + g_2$ mit

$$g_1(x) = e^x + a e^{-\lambda_1 x} - p(x) \quad \text{und} \quad g_2(x) = b e^{-\lambda_2 x} + p(x).$$

Seien nun

$$0 \leq \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_{\tilde{L}}$$

die Nullstellen von g_1 mit den entsprechenden Ordnungen $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{\tilde{L}}$. Wir suchen uns wieder ein Polynom $\tilde{p}$, das die Funktion $e^x - p(x)$ an den Stellen $\tilde{x}_i$ ($1 \leq i \leq \tilde{L}$) mit der Ordnung $\tilde{\beta}_i$ interpoliert und außerdem einen positiven Koeffizienten bei der höchsten Potenz hat, und setzen $g_1 = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$

$$\text{mit } \tilde{g}_1(x) = e^x - p(x) - \tilde{p}(x) \quad \text{und} \quad \tilde{g}_2(x) = a e^{-\lambda_1 x} + \tilde{p}(x).$$

Nach Satz 12 besitzt $\tilde{g}_1$ geometrische Konvergenz über $[0, \infty)$, nach Satz 17 dann auch g_1 . Wenden wir nochmals Satz 17 auf $g = g_1 + g_2$ an, so folgt schließlich: g besitzt geometrische Konvergenz über $[0, \infty)$.

Beispiel 10:

$$g(x) = e^{\lambda x} + a \sin x + b \cos x + p(x)$$

Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$ und p ein Polynom.

Wir können g umformen zu

$$g(x) = e^{\lambda x} + A \cos(x+\phi) + p(x)$$

mit $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $0 \leq \phi < 2\pi$.

Betrachten wir mit $c > 0$

$$e^{\lambda x} + c e^{-\lambda x}$$

und setzen $x_0 := \frac{1}{2\lambda} \ln c$, so gilt mit $y = x - x_0$:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} + c e^{-\lambda x} &= e^{\lambda(x_0+y)} + e^{2\lambda x_0} e^{-\lambda(x_0+y)} \\ &= e^{\lambda x_0} (e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}) \end{aligned}$$

Wählen wir $x_0 := 2k\pi - \phi$ ($k \in \mathbb{Z}$), so ergibt sich für

$$\tilde{g}(y) := g(y+x_0) + c e^{-\lambda(y+x_0)} - p(y+x_0)$$

somit

$$\tilde{g}(y) = e^{\lambda x_0} (e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}) + A \cos y.$$

Sind $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_L$ die Nullstellen von $g(x)$ mit Ordnungen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ in $[0, \infty)$, so wählen wir k so groß, daß $x_0 = 2k\pi - \phi > x_L$ ist und $\tilde{g}(y)$ als ganze Funktion nur nichtnegative Koeffizienten hat. Sodann bestimmen wir ein gerades Polynom $p_1(y)$ mit $\text{grad}(p_1) > \text{grad}(p)$, das an den Stellen $y_i = x_i - x_0$ die Funktion $e^{\lambda(x_0-y)} + p(x_0-y)$ mit der Ordnung β_i interpoliert und einen positiven Koeffizienten bei der höchsten Potenz hat. Dann hat

$$g^*(y) = \tilde{g}(y) + p(y+x_0) + p(-y+x_0) - p_1(y)$$

als ganze, gerade Funktion in y höchstens endlich viele negative Taylorkoeffizienten. Außerdem ist die Wachstumsrelation (4.15) erfüllt. Nach Satz 13 besitzt dann g^* geometrische Konvergenz über $[-\infty, \infty]$. Nun ist

$$g(x) = g^*(x-x_0) - c e^{-\lambda x} - p(-x+2x_0) + p_1(x-x_0) ,$$

setzen wir also

$$g_1(x) = g^*(x-x_0) \quad \text{und}$$

$$g_2(x) = -c e^{-\lambda x} - p(-x+2x_0) + p_1(x-x_0) ,$$

dann sind alle Voraussetzungen von Satz 17 für $g = g_1 + g_2$ erfüllt: g besitzt geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$.

Insbesondere ist damit die Vermutung von Roulier und Taylor [15] bestätigt, daß $e^x + e^4 \cos x$ geometrische Konvergenz besitzt.

Beispiel 11:

$$g(x) = e^{\lambda x} + a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x + p(x)$$

Dabei sind $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 2$ und p ein Polynom.

Für $g(x)$ können wir auch schreiben:

$$g(x) = e^{\lambda x} + \frac{a}{2}(1 + \cos(2x)) + \frac{b}{2}(1 - \sin(2x)) \\ + \frac{c}{2} \sin(2x) + p(x) .$$

Dann folgt aus dem vorigen Beispiel, daß $g(x)$ über $[0, \infty]$ geometrische Konvergenz besitzt.

Beispiel 12:

Wir betrachten

$$g(x) = p(x) (e^x + a \cos x) ,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und p ein Polynom ist mit $p(x) > 0$ für $x \geq 0$.

Nach Beispiel 10 besitzt $e^x + a \cos x$ geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ und ist für

$$-1 < a < \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sin \frac{3\pi}{4}}$$

positiv für alle $x \geq 0$. Aus Satz 15 folgt somit für solche a die geometrische Konvergenz für g über $[0, \infty]$.

Beispiel 13:

Für

$$g(x) = e^{2x} + a \cos x + b \cos^2 x \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

benutzen wir die Zerlegung $g = g_1 + g_2$ mit

$$g_1(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + a \cos x \quad \text{und} \quad g_2(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + b \cos^2 x.$$

Seien nun

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_L$$

die Nullstellen von g mit Ordnungen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ in $[0, \infty)$.

Wir bestimmen ein Polynom p , das die Funktion g_1 an den Stellen x_i mit der Ordnung β_i interpoliert ($1 \leq i \leq L$). Dann ist

$$g = (g_1 - p) + (g_2 + p).$$

Da $g_1 - p$ und $g_2 + p$ nach Beispiel 10 bzw. 11 geometrische Konvergenz über $[0, \infty]$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ besitzen, folgt dies mit Satz 14 auch für g .

L I T E R A T U R

1. N.I. ACHIESER
Vorlesungen über Approximationstheorie
Akademie-Verlag, Berlin, 1966.
2. S. BERNSTEIN
Lecons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle,
Chelsea Publishing Co., New York, 1970.
3. H.-P. BLATT
Rationale Approximation auf $[0, \infty]$,
ZAMM 53 (1973), T 181-182.
4. E.W. CHENEY
Introduction to Approximation Theory,
McGraw-Hill, New York, 1966.
5. W.J. CODY, G. MEINARDUS, R.S. VARGA
Chebyshev Rational Approximations to e^{-x} in $[0, +\infty)$
and Applications to Heat-Conduction Problems,
J. Approximation Theory 2 (1969), 50-65.
6. M. MARDEN
Geometry of Polynomials,
Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1966.
7. G. MEINARDUS
Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods,
Springer-Verlag, Berlin, 1967.

8. G. MEINARDUS
A Converse Theorem in Rational Approximation,
Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1970, 217-220.
9. G. MEINARDUS
Private Mitteilung, 1971.
10. G. MEINARDUS, R.S. VARGA
Chebyshev Rational Approximations to Certain Entire Functions in $[0, \infty)$,
J. Approximation Theory 3 (1970), 300-309.
11. G. MEINARDUS, A.R. REDDY, G.D. TAYLOR, R.S. VARGA
Converse Theorems and Extensions in Chebyshev Rational Approximation to Certain Entire Functions in $[0, \infty)$,
Trans. Amer. Math. Soc. 170 (1972), 171-185.
12. D.J. NEWMAN
Rational Approximation to e^{-x} ,
J. Approximation Theory 10 (1974), 301-303.
13. A.R. REDDY
Addendum to "Converse Theorems and Extensions in Chebyshev Rational Approximation to Certain Entire Functions in $[0, \infty)$,
Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973), 499-502.
14. A.R. REDDY
A Contribution to Rational Chebyshev Approximation to Certain Entire Functions in $[0, \infty)$,
J. Approximation Theory 11 (1974), 85-96.

15. J.A. ROULIER, G.D. TAYLOR
Rational Chebyshev Approximation on $[0, \infty)$,
erscheint in J. Approximation Theory.
16. A. SCHÖNHAGE
Zur rationalen Approximierbarkeit von e^{-x} über $[0, \infty)$,
J. Approximation Theory 7 (1973), 395-398.
17. G. VALIRON
Lectures on the General Theory of Integral Functions,
Chelsea Publishing Co., New York, 1949.
18. H. WERNER
Vorlesung über Approximationstheorie,
Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1966

Copie - Center 2000

852 ERLANGEN - Obere Kaserl. 30